

Sammenligning av gravitasjons og elektromagnetisk stråling fra synkrotroner

Jon-Kåre Hansen
Institutt for fysikk
Norges tekniske høgskole

30. mars 2002

Sammendrag

Fra Maxwells ligninger utleder vi uttrykk for den utstrålte energi i elektromagnetisk stråling fra en elektrisk strøm. Analogt bruker vi Einsteins feltligninger for å finne tilsvarende uttrykk for gravitasjonsstråling fra en varierende energi-impulstensor.

Vi tar så for oss et elektron i konstant sirkelbevegelse, og finner eksplisitte uttrykk for begge typer utstrålt energi. Spesielt ser vi på tilfellet der elektronet har en ekstremt relativistisk hastighet.

Frekvens og vinkelspektrum til den resulterende gravitasjons og elektromagnetiske strålingen sammenlignes. Til slutt ser vi på konkrete eksempler, og på hvilken effektandel i form av gravitasjonsstråling det er realistisk å oppnå i synkrotroner.

Forord

Denne rapporten er resultat av mitt arbeid med hovedoppgaven ved Gruppe for teoretisk fysikk, Institutt for fysikk, Norges tekniske høgskole. Den representerer samtidig en avslutning av studieoppholdet mitt der.

Målet med oppgaven har ikke bare vært å sammenligne uttrykkene for utstrålt effekt og utstrålt energi for henholdsvis gravitasjons- og elektromagnetisk stråling, men vel så mye å vise at fremgangsmåten for å finne disse uttrykkene er svært lik. Derfor har jeg brukt en del tid på å gå tilbake til grunnligningene, og startet utledningene derfra. Dette bærer rapporten preg av.

Til slutt en takk til professor Kåre Olaussen for at han tok seg tid til veiledning.

NTH, 30. mars 2002.
Jon-Kåre Hansen

Innhold

Forord	i
1 Innledning	1
1.1 Radiopulsaren PSR 1913+16	1
1.2 LIGO	2
1.3 Hva er gravitasjonsstråling?	4
1.4 Er det mulig å generere gravitasjonsstråling?	4
2 Elektromagnetisk stråling fra akselererte ladninger	6
2.1 De retarderte potensialene	6
2.2 Liénard-Wiechert potensialene	9
2.3 Elektromagnetiske felter fra en punktladning	11
2.4 Total utstrålt effekt	12
2.5 Vinkelavhengighet til strålingen	15
2.5.1 Akselerasjon parallelt med hastigheten	16
2.5.2 Akselerasjon normalt på hastigheten	18
2.5.3 Energiutbyttet sammenlignet	20
2.6 Frekvensfordeling av utstrålt energi	21
3 Gravitasjonsstråling	24

3.1	Einsteins feltligninger	24
3.1.1	Koordinatbetingelser	26
3.2	Svakt felt approksimasjonen	26
3.3	Planbølger	28
3.3.1	Riccitensoren av orden 2 i $h_{\mu\nu}$ for en planbølge.	28
3.4	Feltet i bølgesonen	30
3.5	Strålingsenergi	31
3.5.1	Dimensjonsanalyse	34
4	Ladning i sirkulær bevegelse	36
4.1	Ustrålt energi i form av elektromagnetisk stråling	37
4.1.1	Fourieromvending av den elektriske strømmen	38
4.1.2	Ustrålt energi per romvinkelenhet ved gitt frekvens	40
4.1.3	Ustrålt energi ved ekstremt relativistiske hastigheter	42
4.1.4	Gjennomsnittlig utstrålt effekt per frekvens og romvinkelenhet	49
4.1.5	Effekt i en romvinkelretning	50
4.1.6	Totalt utstrålt effekt	51
4.2	Ustrålt energi i form av gravitasjonsstråling	52
4.2.1	Fourieromvending av energi-impulstensoren	52
4.2.2	Ustrålt energi per romvinkelenhet ved gitt frekvens	54
4.2.3	Ustrålt energi ved ekstremt relativistiske hastigheter	60
4.2.4	Gjennomsnittlig utstrålt effekt per frekvens og romvinkelenhet	61
4.2.5	Effekt i en romvinkelretning	62
4.2.6	Totalt utstrålt effekt	62

5 Energiutstrålingen sammenlignet	64
5.1 Et elektron ved romtemperatur	64
5.1.1 Elektromagnetisk stråling	64
5.1.2 Gravitasjonsstråling	66
5.1.3 Endre andelen utsendt gravitasjonsenergi	66
5.2 Elektron med relativistisk hastighet	68
5.2.1 Høy-energi akseleratorer	68
5.2.2 LEP-akseleratoren	68
5.2.3 LHC-akseleratoren	69
5.2.4 Vendepunktsenergien	70
5.3 Vinkelspektrum for emittert stråling	70
5.3.1 Elektromagnetisk vinkelspektrum	71
5.3.2 Vinkelspektrum for gravitasjonstråling	71
5.4 Frekvensspektrum	74
5.4.1 De modifiserte Besselfunksjonene	74
5.4.2 Kritisk frekvens og kritisk vinkel	74
5.4.3 Elektromagnetisk frekvensspektrum	76
5.4.4 Gravitasjonstråle frekvensspektrum	80
6 Konklusjon	84
A Levi-Civita-symbolet	86
B Mellomregninger	87
B.1 Fra Liénard-Wiechert potensialene til de elektromagnetiske feltene	87
B.1.1 Sammenhengen mellom t og t' og mellom x_i og t'	87
B.1.2 Noen deriverte størrelser	88

B.1.3	Det elektriske feltet	89
B.1.4	Den magnetiske flukstettheten	90
B.2	Utstrålt elektromagnetisk energi fra en ladet partikkel	90
B.3	Beregning av effekt per romvinkelenhet	92
B.3.1	For elektromagnetisk stråling	92
B.3.2	For gravitasjonsstråling	93
B.4	Harmoniske frekvenser i utstrålt energi	93
C	Prosedyre for forenkling av utstrålt gravitasjonsenergi	95
D	Referanser	97

Figurer

1.1	Slik ser en for seg at gravitasjonsstråle-detektoren i prosjektet LIGO vil ta seg ut. Hver 'arm' er 4 km lang. Hentet fra [10]. . . .	3
2.1	En ladet partikkel som følger banen $r(\tau)$ vil bare bidra til feltet $A^\mu(x)$ idet den er ved $r(\tau_0)$	10
2.2	Utstrålt effekt per romvinkelenhet i enheter av $\frac{e^2 \dot{v}^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3}$, fra en ladning som akselereres parallelt med hastigheten, som funksjon av β og θ (stråleretning i forhold til hastighetsretning). Nær $(\theta, \beta) = (0, 1)$ er utstrålt effekt ikke begrenset til boksens høyde, slik som en kan få inntrykk av på figuren.	16
2.3	Logaritmisk utstrålt effekt per romvinkelenhet, i enheter av $\frac{e^2 \dot{v}^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3}$, fra en ladning som akselereres parallelt med hastigheten, som funksjon av β og θ (stråleretning i forhold til hastighetsretning).	17
2.4	18
2.5	Logaritmisk utstrålt effekt i enheter av $\frac{e^2 \dot{v}^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3}$, for $\beta = 0.99$, som funksjon av romvinkel. Avstanden fra origo til et punkt på overflaten angir utstrålt effekt i denne retningen. Strålingen er sterkt konsentrert fremover.	19
4.1	Elektron i sirkelbane med radius r_0 og hastighet v_0 som sender ut stråling med bølgevektor \vec{k}	37
4.2	Logaritmisk utstrålt energi per omløp som funksjon av n ved $\beta = 0.95$ i retning $\theta = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{16})$. Heltrukken linje er brukt for klarhets skyld, mens verdiene bare er gyldig for n heltallig.	43
4.3	Utstrålt elektromagnetisk energi per omløp i x - y planet som funksjon av n ved $\beta = (0.50, 0.90, 0.95, 0.98, 0.99)$	44

4.4	Utstrålt energi per omløp som funksjon av romvinkelretning med $n = 1$ og $\beta = 0.999$, i enheter av $\mu_0 c \pi \left(\frac{e}{4\pi}\right)^2$	45
4.5	Utstrålt energi per omløp som funksjon av romvinkelretning med $n = 5$ og $\beta = 0.999$, i enheter av $\mu_0 c \pi \left(\frac{e}{4\pi}\right)^2$	46
4.6	Utstrålt energi per omløp som funksjon av romvinkelretning med $n = 50$ og $\beta = 0.999$, i enheter av $\mu_0 c \pi \left(\frac{e}{4\pi}\right)^2$	47
4.7	Utstrålt energi per omløp i retning $d\Omega$ med med frekvens $\omega = \omega_0$ og $\beta = 0.999$, i enheter av $\left(\frac{m^2 G}{4\pi c}\right)$	57
4.8	Utstrålt energi per omløp i retning $d\Omega$ med med frekvens $\omega = 5\omega_0$ og $\beta = 0.999$, i enheter av $\left(\frac{m^2 G}{4\pi c}\right)$	58
4.9	Utstrålt energi per omløp i retning $d\Omega$ med med frekvens $\omega = 50\omega_0$ og $\beta = 0.99$, i enheter av $\left(\frac{m^2 G}{4\pi c}\right)$	59
5.1	Logaritmisk utstrålt effekt i form av elektromagnetisk stråling fra et elektron i sirkelbevegelse ved romtemperatur, som funksjon θ og n	65
5.2	Logaritmisk utstrålt effekt i form av gravitasjonsstråling fra et elektron i sirkelbevegelse ved romtemperatur, som funksjon θ og n	67
5.3	Total utstrålt elektromagnetisk effekt som funksjon av vinkel.	72
5.4	Total utstrålt gravitasjonseffekt som funksjon av vinkel.	73
5.5	Fra øverst til nederst: $K_{\frac{2}{3}}(x)^2$, $K_{\frac{1}{3}}(x) \cdot K_{\frac{2}{3}}(x)$ og $K_{\frac{1}{3}}(x)^2$. Begge aksene har logaritmisk skala.	75
5.6	Frekvensspektrum til emittert elektromagnetisk effekt fra et elektron i sirkelbane.	78
5.7	Logaritmisk frekvensspektrum til emittert elektromagnetisk effekt fra et elektron i sirkelbane.	79
5.8	Frekvensspektrum til emittert effekt i form av gravitasjonsstråling fra et elektron i sirkelbane.	82
5.9	Logaritmisk frekvensspektrum til emittert effekti form av gravitasjonsstråling fra et elektron i sirkelbane.	83

Notasjon

2

- Vi bruker enhetssystemet SI.
- Like indekser summeres over.
- Komplekskonjugerte størrelser merkes med en *, for eksempel A^* .
- Partiellderiverte skrives i noen tilfeller på kompakt form, slik at

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \qquad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

Tredimensjonale størrelser

- Latinske indekser brukes i tredimensjonale tensorer, og kan ha verdiene 1,2,3.
- En hatt ($\hat{}$) over størrelsen indikerer en vektor av enhet lengde, for eksempel \hat{n} .

Firedimensjonale størrelser

- Greske indekser brukes i firedimensjonale tensorer, og kan ha verdiene 0,1,2,3
- Vi bruker den metriske signaturen (+ - - -), slik at

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- D'Alembert operatoren:

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Kapittel 1

Innledning

Det er velkjent at en akselerert ladning sender ut elektromagnetisk stråling. Rundt oss har vi veldig mange eksempler på at det teoretiske grunnlaget på dette området stemmer godt overens med virkeligheten, for eksempel radio og fjernsyn. Teorien bak har vært godtatt i hundre år. Mange av de formlene for elektromagnetisk energi vi etter hvert skal utlede har vært kjent, og eksperimentelt verifisert, i femti år.

Med gravitasjonsstråling stiller saken seg helt annerledes. Allerede i 1913, to år før Einstein presenterte sine endelige feltligninger, gjorde han det klart at perturbasjoner i metrikken g vil propagere med lysets hastighet ([8], side 944). I de neste 40 årene var generell relativitetsteori kanskje den mest kjente, men minst verifiserte fysiske teorier. Arthur Eddington annonserte i 1919 at han hadde observert avbøying av lys fra stjerner som skyldes solens gravitasjonsfelt. I tillegg kunne teorien beskrive avvik i banen til Mercur, planeten nærmest solen, sin bane. I 60-årene ble en del tester på ekvivalensprinsippet utført, blant annet av Irwin Shapiro. Joseph Weber annonserte i 1969 at han hadde detektert gravitasjonsbølger, men andre forskere har ikke klart å gjenskape hans resultater. Helt til de siste ti år har det altså vært svært få eksperimenter som har kunnet støtte opp om generell relativitetsteori, og ingen som har verifisert at gravitasjonstråling eksisterer!

1.1 Radiopulsaren PSR 1913+16

Joseph H. Taylor, og hans student Russel A. Hulse oppdaget i 1974 den første *dobbelpulsaren*. Hulse-Taylor pulsaren, også kalt PSR 1913+16, består av to svært små himmellegemer, hver med en radius lik et titalls kilometer, men med en

masse sammenlignbar med solens, som befinner seg nær hverandre (noen få ganger månens avstand fra jorden). Dobbelpulsarens omløpstid er under 8 timer. Avvikene fra Newtons gravitasjonsteori blir derfor i dette systemet store.

Den viktigste egenskapen hos denne pulsaren er dens pulsperiode, ca 59 millisekunder, som er svært stabil. Perioden øker med mindre enn 5 % i løpet av 1 million år. Det er på høyde med de beste atomklokker. Man har derfor kunnet bestemme frekvensen meget nøyaktig. 14 januar 1986 var pulsarfrekvensen $16.940539184253(1)$ Hz, der tallet i parentes er usikkerhet i siste siffer[9]. Like viktig er det at man har kunne bestemme forandringen i frekvens: En sakte, men stabil forandring lik $-2.47583(1) \cdot 10^{-15}$ Hz/s.

Hulse og Taylor har målt mange parametre i banen. Blant annet har de målt presesjonen i banen: $4.22662(1)$ grader per år. Dette er likt det som generell relativitetsteori forutsier.

Men det som er enda mer interessant er at binærsystemet er en roterende massekvadrupol, og at det dermed stråler ut gravitasjonsenergi. Energien i utstrålingen balanseres av at stjernene stadig nærmer seg hverandre (langs en spiralbane). For PSR 1913+16 er forholdet mellom det observerte energitapet og den som generell relativitetsteori forutsier 1.0032 ± 0.0035 . Dette er første og hittil eneste test på om det eksisterer gravitasjonstråling, og den førte til at Hulse og Taylor fikk Nobelprisen i fysikk i 1993. Det var et resultat av 18 års bruk av det 300 m store radioteleskopet på Puerto Rico.

1.2 LIGO

Taylor og Hulse har ikke detektert gravitasjonsbølger. De har bare indirekte vist at en forandring i perioden til en pulsar kan forklares med at den sender ut gravitasjonstråling. En følge av Hulse og Taylors suksess var at innretninger som skulle detektere gravitasjonsstråling ble planlagt. Hittil har ingen lyktes.

Et nytt stort prestisjeprosjekt er imidlertid i gang. Det kalles LIGO (The laser interferometer gravitational-wave observatory), og to detektorer planlagt. De vil stå ferdig i år 2000, og vil koste omtrent \$290 millioner[10].

Som Figur 1.1 viser, vil detektoren bestå av to armer normalt på hverandre. Hver arm består en lang vakuum-tett tunnel med speil i enden og laser i den andre. Ideen er at gravitasjonsbølger vil strekke en arm og trykke sammen den andre. Ved å interferere laserlys fra de to armene kan en avlese forskjellen i strekking. En har beregnet at den 4 km lange armene vil strekkes omtrent 10^{-15} m på grunn

Figur 1.1: Slik ser en for seg at gravitasjonsstråle-detektoren i prosjektet LIGO vil ta seg ut. Hver 'arm' er 4 km lang. Hentet fra [10].

av gravitasjonsstråling¹. Så det stilles store krav til speil, interferometre og ikke minst til demping av andre vibrasjoner, for eksempel fra trafikk. Det er foreløpig planlagt to slike installasjoner, en på hver sin kant av USA. To tilsvarende detektorer er i tillegg under planlegging i Europa[10].

1.3 Hva er gravitasjonsstråling?

En gravitasjonsbølge, om noe slikt eksisterer, er *en fluktuasjon i metrikken som propagerer med lysets hastighet*. Kilden kan sees på som et infinitesimalt volumelement der energi- og impulstetthet varierer i tid, eller en forflytning av energi og impuls i tid og rom. Variasjonen uttrykkes gjennom en varierende energi-impulstensor. Mest håndfast er det kanskje om kilden til strålingen det er snakk om er energi i form av masse. Da kan vi tenke oss eksempler der fordelingen av masse i rommet varierer, som i eksempelet med dobbeltpulsaren.

En liten kuriositet er det jo at elektromagnetisk stråling selv kan gi opphav til gravitasjonsstråling. Utstrålt elektromagnetisk energi fører til at energien i et fast volumelement av rommet vil variere, og dermed gi opphav til gravitasjonstråling. Den tilhørende utstrålte effekt vil imidlertid, som vi også vil se fra de formlene vi seinere skal utlede, være forsvinnende liten.

1.4 Er det mulig å generere gravitasjonstråling?

Svaret på dette spørsmålet er selvfølgelig ja. Det er i bunn og grunn bare å riste litt på armen sin, og den vil ifølge Einsteins generelle relativitetsteori stråle 'som bare det'. Det skjønner vi av definisjonen i avsnittet over. Problemet er at utstrålt effekt er meget liten i dette tilfellet. For å observere effekt har man til nå ikke hatt særlig mye å ty til, bortsett i fra dobbeltpulsaren som ble omtalt ovenfor.

Vår intensjon med denne hovedoppgaven, var i motsetning til LIGO-prosjektet, der man vil detektere gravitasjonsstråling, å se om det er realistisk å kunne generere gravitasjonsstråling ved for eksempel å ta i bruk partikkelakseleratorer. Rettere sagt: Om det vil gå an å generere en utstrålt effekt i form av gravitasjonstråling som kan påvises. Ganske raskt ble det klart en må opp i relativistiske hastigheter. Og i et laboratorium på jordoverflaten er dette med dagens teknologi kun mulig for lette, ladete partikler, for eksempel elektroner. Det medfører at de vil stråles ut elektromagnetisk stråling samtidig. Så spørsmålet blir derfor

¹\$290 millioner gir en relativt høy transportkostnad per meter for å flytte et lite speil 10^{-15} m, selv om energikilden er sofistikert!

like mye om andelen utstrålt gravitasjonsenergi kan bli stor nok til at den kan detekteres.

I neste kapittel bruker vi Maxwells ligninger for å utlede uttrykk for utstrålt elektromagnetisk energi fra en partikkel med ladning e . I Kapittel 3 finner vi analogt utstrålt energi i form av gravitasjonsstråling fra en partikkel med masse m . I Kapittel 4 ser vi så på et spesialtilfelle: en partikkel i sirkelbane med konstant hastighet. Vi finner utstrålt energi og effekt både for gravitasjonsstråling og elektromagnetisk stråling. I Kapittel 5 sammenlignes utstrålt effekt, og vi finner de tilførende frekvensspektrumene. Til slutt kommer vår konklusjon i Kapittel 6.

I hele resten av oppgaven er det verdt å merke seg at vi hele tiden først utleder uttrykkene for elektromagnetisk stråling, deretter for gravitasjonsstråling. Dette fordi at de elektromagnetiske uttrykkene er enklere, og i mange tilfeller har kan vi sammenligne resultatene med blant annet Jackson[3]. Når vi så har 'lært' oss fremgangsmåten, prøver vi å gjøre det helt analoge i gravitasjonsstråle-tilfellet, der vi i mange tilfeller ikke har hatt referanser å sammenligne uttrykkene med.

Kapittel 2

Elektromagnetisk stråling fra akselererte ladninger

I dette kapitlet skal vi bruke Maxwells ligninger til å finne uttrykk for utstrålt energi fra en ladning i bevegelse.

2.1 De retarderte potensialene

Maxwells ligninger i vakuum

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} \quad (2.4)$$

er fire kildefrie ligninger (2.1) og (2.3), og fire ligninger med kildeledd (2.2) og (2.4). Det *elektriske feltet* \vec{E} og den *magnetiske flukstetthet* \vec{B} utgjør det *elektromagnetiske felt*. Ladningstettheten ρ og strømtettheten \vec{j} av elektrisk ladning opptrer som kilde. ϵ_0 er permittiviteten og μ_0 permeabiliteten i vakuum, mens $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$.

Vi vil prøve å få ligningene på relativistisk kovariant form. Det kan vi ved å innføre noen firedimensjonale størrelser. Maxwell-feltet har seks uavhengige komponenter: $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ og $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$. Det er like mange som en

antisymmetrisk tensor av rang to. Vi kan derfor definere den antisymmetriske *elektromagnetiske felttensoren*

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Det kan lett verifiseres at de fire Maxwell-ligningene med kildeledd nå kan skrives på kovariant form

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\nu} F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\mu \quad (2.6)$$

der den *elektromagnetiske firestrømmen* er

$$j^\mu = (c\rho, \vec{j}) = (c\rho, j_x, j_y, j_z) \quad (2.7)$$

og

$$x^\mu = (ct, \vec{x}) = (ct, x_1, x_2, x_3) \quad (2.8)$$

De fire kildefrie Maxwellligningene er automatisk oppfylt dersom feltene \vec{E} og \vec{B} uttrykkes ved et skalarpotensial Φ og et vektorpotensial \vec{A} , som følger

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (2.9)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.10)$$

For å finne hvordan den elektromagnetiske felttensoren avhenger av Φ og \vec{A} , definerer vi nå *firevektorpotensialet*

$$A^\alpha = \left(\frac{\Phi}{c}, \vec{A}\right) = \left(\frac{\Phi}{c}, A_x, A_y, A_z\right) \quad (2.11)$$

Dermed kan den elektromagnetiske felttensoren uttrykkes som

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (2.12)$$

Nå er vi i stand til å uttrykke Maxwells ligninger bare ved firestrømmen j^μ og firevektorpotensialet A^α . Innsatt i (2.6) får vi nemlig

$$\partial_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu \partial^\nu A^\mu = -\mu_0 j^\mu \quad (2.13)$$

Firevektorpotensialet A^μ er ikke entydig gitt av feltene, idet en *gaugetransformasjon* av potensialet

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu f(x) \quad (2.14)$$

der $f(x)$ er en skalar funksjon, ikke forandrer \vec{E} og \vec{B} . Dette benytter vi for å få ligning (2.13) på en enklere form. Vi velger å transformere (justere) slik at A oppfyller den såkalte Lorentz-betingelsen:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \partial_\nu A^\nu = 0 \quad (2.15)$$

Første ledd på venstre side i (2.13) er i denne justeringen null, og ved å innføre d'Alembert-operatoren $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ står vi igjen med

$$\square A^\mu = \mu_0 j^\mu \quad (2.16)$$

Dette er ligningen som bestemmer potensialene til et gitt elektromagnetisk felt. Det er en firedimensjonal bølge-ligning, med kildeledd på høyre side. Vi legger merke til at den eneste betingelsen vi har lagt på potensialene til nå, er at de må tilfredstille Lorentzbetingelsen (2.15).

Løsningen av (2.16) kan finnes ved å finne en Greenfunksjon $D(x, x')$ for ligningen

$$\square_x D(x, x') = \delta^{(4)}(x - x') \quad (2.17)$$

der $\delta^{(4)}(x - x') = \delta(x_0 - x'_0) \delta(\vec{x} - \vec{x}')$ er den firedimensjonale deltafunksjonen. En kan lett verifisere at med en Greensfunksjon slik den er definert i ligning (2.17), kan firepotensialet skrives

$$A^\alpha(x) = A_{inn}^\alpha(x) + \mu_0 \int d^4 x' D_r(x - x') j^\alpha(x'). \quad (2.18)$$

$A_{inn}^\alpha(x)$ er det innkommende feltet, altså løsningen av ligning (2.16) uten kildeledd (høyre side lik null). Hvis vi skal se på det elektriske feltet fra en isolert ladningsfordeling, vil A_{inn}^α være lik null. Indeksen r står for retardert, det vil si at vi har brukt den Greensfunksjonen som tilfredstiller kausalitet (årsak før virkning, $t > t'$). Vi tar oss ikke tid til å eksplisitt finne den retarderte Greensfunksjonen her, men vi bruker løsningen slik den er funnet i Jackson[3], ligning (12.133):

$$D_r(x - x') = \frac{1}{2\pi} H(x_0 - x'_0) \delta[(x - x')^2] \quad (2.19)$$

Stegfunksjonen H er definert som

$$H(x_0 - x'_0) = H[c(t - t')] = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

De potensialer $A^\mu(x)$ en får ved å bruke den retarderte Greensfunksjonen kalles *retarderte potensialer*. Vi har altså løst Maxwells ligninger, og funnet det firedimensjonale potensialet gitt som et firedimensjonalt integral over strømmen.

2.2 Liénard-Wiechert potensialene

Vi ser nå på en partikkel med ladning e med posisjon $\vec{r}(t)$ og hastighet $\vec{v}(t)$ i forhold til et observatørsystem. Den tilhørende ladningstetthet og strømtetthet i dette systemet er

$$\left. \begin{aligned} \rho(\vec{x}, t) &= e\delta(\vec{x} - \vec{r}(t)) \\ \vec{j}(\vec{x}, t) &= e\vec{v}(t)\delta(\vec{x} - \vec{r}(t)) \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

Ladnings og strømtetthetene kan skrives som en firestrøm på kovariant form. Vi lar parameteren τ være partikkelens *egentid*, det vil si tiden partikkelen selv måler, eller sagt på en annen måte: tiden som måles i partikkelens hvilesystem. Vi kan da introdusere ladningens fireposisjon $r^\alpha(\tau)$ og integrere over egentiden ved hjelp av en deltafunksjon. Dermed kan den resulterende firervektorstrømmen nå skrives

$$j^\alpha(x) = ec \int d\tau v^\alpha(\tau) \delta^{(4)}[x - r(\tau)] \quad (2.22)$$

der v^α er firehastighet. Om observatørsystemet er et treghtetsystem, som vi fra nå av velger det til å være, vil posisjons-firevektoren ha formen

$$r^\alpha(\tau) = [ct, \vec{r}(t)] \quad (2.23)$$

og firehastighet ha formen

$$v^\alpha(\tau) \equiv \left(\frac{dx_0}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{d\tau} \right) = (\gamma c, \gamma \vec{v}) \quad (2.24)$$

der

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{\vec{v}}{c})^2}} \quad (2.25)$$

er den velkjente relativistiske gammafaktoren.

Vi setter nå firestrømmen inn i uttrykket for A^μ , ligning (2.18). Vi bytter samtidig om integrasjonsrekkefølgen. Uten innkommende felter er

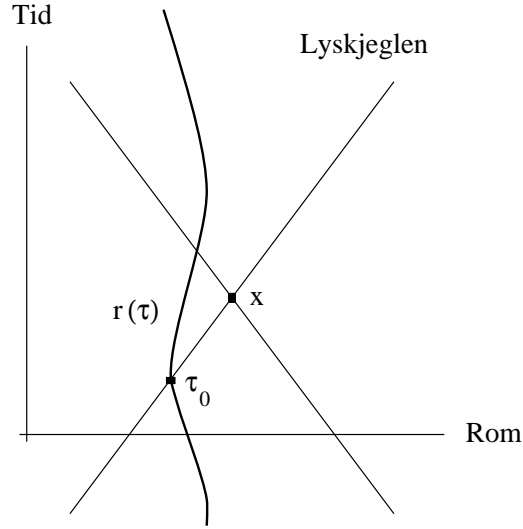
$$A^\alpha(x) = e\mu_0 c \int d\tau v^\alpha(\tau) \int d^4x' D_r(x - x') \delta^{(4)}[x' - r(\tau)] \quad (2.26)$$

Vi skal nå vise at vi kan klare å løse disse integralene, og at det vil gi oss eksplisitte uttrykk for de elektromagnetiske feltene. Så vi setter inn uttrykket for den retarderte Greensfunksjonen (2.19), og får

$$A^\alpha(x) = \frac{ec\mu_0}{2\pi} \int d\tau v^\alpha(\tau) \int d^4x' H(x_0 - x'_0) \delta[(x - x')^2] \delta^{(4)}[x' - r(\tau)] \quad (2.27)$$

som etter integrasjon over x' blir

$$A^\alpha(x) = \frac{ec\mu_0}{2\pi} \int d\tau v^\alpha(\tau) H(x_0 - r_0(\tau)) \delta[(x - r(\tau))^2] \quad (2.28)$$



Figur 2.1: En ladet partikkel som følger banen $r(\tau)$ vil bare bidra til feltet $A^\mu(x)$ idet den er ved $r(\tau_0)$.

Det gjenstående integral over ladningens egentid gir bidrag kun ved $\tau = \tau_0$, der τ_0 er definert av *lyskjglebetingelsen*,

$$[x - r(\tau)]^2 = 0 \quad (2.29)$$

og retardasjonskravet fra stegfunksjonen $H(x_0 - r_0(\tau))$:

$$x_0 > r_0(\tau_0) \quad (2.30)$$

Dette er illustrert i Figur 2.1. Den retarderte Greensfunksjon er kun forskjellig fra null i den delen av lyskjeglen som ligger bak punktet x i tid. Banen til partikkelen i rom-tid-koordinatsystemet, $r(\tau)$, skjærer lyskjeglen ved kun to punkter, ett før og ett etter x_0 . Det tidligste punktet, $r(\tau_0)$, er det eneste som gir bidrag til feltene ved x .

For å forenkle (2.28), bruker vi at

$$\begin{aligned} \delta[(r(\tau) - x)^2]_{x_0 > r_0(\tau_0)} = \\ \frac{\delta[r(\tau) - r(\tau_0)]}{\left| \left(\frac{d}{d\tau} [(x - r(\tau))^2] \right)_{\tau=\tau_0} \right|} = \frac{\delta[\tau - \tau_0]}{\left| (-2[x - r(\tau)]_\beta v^\beta(\tau))_{\tau=\tau_0} \right|} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Firepotensialet blir nå

$$A^\alpha(x) = \frac{ec\mu_0}{4\pi} \int d\tau v^\alpha(\tau) \frac{\delta[\tau - \tau_0]}{\left| ([x - r(\tau)] \cdot v(\tau))_{\tau=\tau_0} \right|},$$

$$\Rightarrow A^\alpha(x) = \frac{ec\mu_0 v^\alpha(\tau)}{4\pi v \cdot [x - r(\tau)]} \Big|_{\tau=\tau_0}. \quad (2.32)$$

Vi har nå klart å finne et eksplisitt uttrykk for firepotensialet på kovariant form.

Vi kan skrive om potensialene (2.32) på en mer intuitiv, men ikke kovariant, form. Lyskjeglebetingelsen (2.29) medfører nemlig $x_0 - r_0(\tau_0) = |\vec{x} - \vec{r}(\tau_0)| \equiv R$, slik at

$$\begin{aligned} v \cdot (x - r) &= v_0[x_0 - r_0(\tau_0)] - \vec{v} \cdot [\vec{x} - \vec{r}(\tau_0)] \\ &= \gamma c R - \gamma \vec{v} \cdot \vec{n} R = \gamma c R (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}), \end{aligned} \quad (2.33)$$

der \vec{n} er en enhetsvektor i retningen $\vec{x} - \vec{r}(\tau)$ og $\vec{\beta} = \vec{v}(\tau)/c$. Siden vi har valgt ut et spesielt koordinatsystem (observatørsystemet), som vi uttrykker de elektromagnetiske potensialene i, vil vi også uttrykke serien av egentidspunkter τ_0 i dette koordinatsystemet. Om tidspunktet t' i observatørsystemet svarer til egentiden $\tau = \tau_0$, medfører lyskjeglebetingelsen (2.29) at $t = t' + R(t')/c$. Potentialene (2.32) kan da skrives

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\vec{x}, t) &= cA^0(x) = \left[\frac{e}{4\pi\epsilon_0(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})R} \right]_{t'=t-\frac{R(t')}{c}} \\ \vec{A}(\vec{x}, t) &= [A^1(x), A^2(x), A^3(x)] = \left[\frac{e\mu_0 c \vec{\beta}}{4\pi(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})R} \right]_{t'=t-\frac{R(t')}{c}} \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

Potensialene (2.32) eller (2.34) kalles *Liénard-Wiechert potensialene*. Fra disse kan en regne ut de elektromagnetiske feltene \vec{E} og \vec{B} .

For ikke-relativistiske partikler $\beta \rightarrow 0$, får man tilbake de klassiske resultatene for potensialer fra en punktladning:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\vec{x}, t) &= \left[\frac{e}{4\pi\epsilon_0 R} \right]_{t'=t-\frac{R(t')}{c}} \\ \vec{A}(\vec{x}, t) &= \left[\frac{e\mu_0 \vec{v}}{4\pi R} \right]_{t'=t-\frac{R(t')}{c}} \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

Potensialet Φ er det klassiske Coulombpotensialet.

2.3 Elektromagnetiske felter fra en punktladning

Vi har funnet de elektromagnetiske potensialene, og ved hjelp av definisjonene (2.9) og (2.10) skal vi finne \vec{E} og \vec{B} . Vi setter inn (2.34) og får

$$\vec{E} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\nabla \left[\frac{1}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})R} \right]_{t'=t-\frac{R(t')}{c}} + \frac{\partial}{c\partial t} \left[\frac{\vec{\beta}}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})R} \right]_{t'=t-\frac{R(t')}{c}} \right) \quad (2.36)$$

$$\vec{B} = \frac{e\mu_0 c}{4\pi} \nabla \times \left[\frac{\vec{\beta}}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})R} \right]_{t'=t-\frac{R(t')}{c}} \quad (2.37)$$

Å gjennomføre denne regningen krever en del triksing med partiellderiverte. På grunn av sammenhengen $t = t' + \frac{R(t')}{c}$ fra lyskjeglebetingelsen (2.29), vil både \vec{x} og t avhenge av t' . Vi må passe på å evaluere de deriverte i t' . Denne utregningen har vi vist i Appendiks B.1.

Vi lar $\dot{\vec{\beta}} = \frac{d\vec{\beta}}{dt}$, altså den vanlige akselerasjonen delt på lyshastigheten i vakuum, c . Da kan resultatet skrives

$$\vec{B} = \frac{1}{c} [\vec{n} \times \vec{E}]_{t'=t-\frac{R(t')}{c}}, \quad (2.38)$$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{n} - \vec{\beta}}{\gamma^2(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3 R^2} \right]_{t'=t-\frac{R(t')}{c}} + \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{B}}]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3 R} \right]_{t'=t-\frac{R(t')}{c}} \quad (2.39)$$

Feltene (2.38) og (2.39) deles inn i ”hastighetsfelt”, som er uavhengig av akselerasjonen, og ”akselerasjonsfelt”, som avhenger lineært av $\dot{\vec{\beta}}$. *Hastighetsfeltene* er essensielt statiske felt som faller av som R^{-2} . *Akselerasjonsfeltene* er typiske strålingsfelter der både \vec{E} og \vec{B} er vinkelrett radiusvektoren, og varierer som R^{-1} . Når vi seinere skal beregne utstrålt effekt, skal vi derfor benytte akselerasjonsfeltene.

Vi legger også merke til at for akselerasjonsfeltene står både det elektriske feltet \vec{E} og den magnetiske flukstetthet \vec{B} normalt på radius vektor \vec{n} .

I den ikke-relativistiske grensen ($\beta \rightarrow 0$ og $\gamma \rightarrow 1$), og uten akselerasjon ($\dot{\vec{\beta}} \rightarrow 0$), ser vi at det elektriske feltet i (2.39) reduseres til Coulomb-feltet:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{e\vec{n}}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{e\vec{n}}{4\pi\epsilon_0 R} \Big|_{t'=t-\frac{R(t')}{c}} \quad (2.40)$$

Som vi ser er det statiske Coulombfeltet et hastighetsfelt.

2.4 Total utstrålt effekt

Vi skal se på total utstrålt effekt fra en ladning i bevegelse. Først ser vi på en akselerert ladning i som blir observert i et referansesystem der ladningen har liten fart i forhold til lyshastigheten. Da gjelder den klassiske *Larmorformelen* for en

ikke-relativistisk akselerert ladning:

$$P = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} |\dot{\vec{v}}|^2 \quad (2.41)$$

P er instantan utstrålt effekt (Jackson[3] ligning (14.22)). Denne formelen er ikke gyldig om partikkelen har relativistisk hastighet. En kan imidlertid vise at den utstrålte effekten P er en Lorentzinvariant ([11], side 106-112). Derfor er det nærliggende å gjette at den relativistiske generalisering av (2.41), finnes ved å la akselerasjonsfaktoren $|\dot{\vec{v}}|^2$ erstattes av et produkt av firevektorer. De naturlige tilgjengelige som kan velges er fireimpuls eller firehastighet. En Lorentzinvariant generalisering er da

$$P = -\frac{1}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3} \left(\frac{dp_\mu}{d\tau} \frac{dp^\mu}{d\tau} \right) \quad (2.42)$$

der *fireimpulsen* p^u defineres som

$$p^u = [E/c, \vec{p}] = [\gamma mc, \gamma m \vec{v}] \quad (2.43)$$

Dette er den eneste relativistiske generaliseringen av Larmorformelen som i tillegg til overnevnte egenskaper, tilfredstiller de to nødvendige betingelsene:

- Avhenger kun av $\vec{\beta}$ og $\dot{\vec{\beta}}$, slik (2.38) og (2.39) indirekte medfører.
- Reduseres til Larmorformelen når $\beta \rightarrow 0$

Det siste punktet kan vises slik:

$$\begin{aligned} -\frac{dp_\mu}{d\tau} \frac{dp^\mu}{d\tau} &= \left(\frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dE}{d\tau} \right)^2 = \left(\frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\sqrt{c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4}}{d\tau} \right)^2 \\ &= \left(\frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{c^2 p}{E} \frac{dp}{d\tau} \right)^2 = \left(\frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{1 + \frac{m^2 c^4}{p^2 c^2}} \left(\frac{dp}{d\tau} \right)^2 \\ &= \left(\frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{1 + \frac{m^2 c^4}{\gamma^2 m^2 \beta^2 c^4}} \left(\frac{dp}{d\tau} \right)^2 = \left(\frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2 - \beta^2 \left(\frac{dp}{d\tau} \right)^2 \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Vi har satt $p = |\vec{p}|$. Konklusjonen blir at den relativistiske generaliseringen av Larmorformelen (2.42) reduseres til Larmorformelen (2.41) i den ikke-relativistiske grensen $\beta \rightarrow 0$.

Vi vil nå prøve å uttrykke den relativistiske generaliseringen (2.42) ved mer familiære størrelser som hastighet og akselerasjon. Vi vet fra spesiell relativitetsteori at det invariante linjeelementet $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ kan skrives

$$ds^2 = c^2 dt^2 - |d\vec{x}|^2 = c^2 dt^2 (1 - \beta^2) \quad (2.45)$$

Egentiden τ er definert som det koordinatsystem der systemet er instantant i ro, slik at $ds = cd\tau$. Dermed finner vi følgende sammenheng mellom t og τ :

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \beta^2} = \frac{dt}{\gamma(t)} \quad (2.46)$$

Med denne i bakhodet kan vi finne den deriverte av γ med hensyn på egentiden τ i koordinatsystemet (t, \vec{x}) :

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{1}{2\gamma} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{1 - \beta^2} \right) = \gamma^3 \vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{d\tau} = \gamma^4 \vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}} \quad (2.47)$$

Denne sammenhengen kan vi bruke til å uttrykke den relativistisk gyldige effektformelen i observatørsystemets koordinater.

Setter vi inn $E = \gamma mc^2$ og $\vec{p} = \gamma c\vec{v}$ i (2.42), får vi *Liénards formel*:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{6\pi \epsilon_0 m^2 c^3} \left[\left(\frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dE}{d\tau} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{6\pi \epsilon_0 m^2 c^3} \left[\left(\frac{d\gamma m \vec{v}}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\gamma mc^2}{d\tau} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{6\pi \epsilon_0 c} \left[\left(\frac{d\gamma}{d\tau} \vec{\beta} + \frac{d\vec{\beta}}{d\tau} \gamma \right)^2 - \left(\frac{d\gamma}{d\tau} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{6\pi \epsilon_0 c} \gamma^8 \left[((\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})\vec{\beta} + \dot{\vec{\beta}}(1 - \beta^2))^2 - (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 \right] \\ &= \frac{1}{6\pi \epsilon_0 c} \gamma^8 \left[(\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 \beta^2 + \dot{\beta}^2 (1 - 2\beta^2 + \beta^4) + 2(\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 (1 - \beta^2) - (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 \right] \\ &= \frac{1}{6\pi \epsilon_0 c} \gamma^6 \left[\dot{\beta}^2 - (\beta^2 \dot{\beta}^2 - (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2) \right] \\ &= \frac{1}{6\pi \epsilon_0 c} \gamma^6 [(\dot{\vec{\beta}})^2 - (\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}})^2] \quad (2.48) \end{aligned}$$

I den ikke-relativistiske grensen, $\beta \rightarrow 0$ og $\gamma \rightarrow 1$, ser vi at Liénards formel (2.48) reduseres til Larmor-uttrykket, (2.41).

2.5 Vinkelavhengighet til strålingen

For relativistisk bevegelse vil akselerasjonsfeltene avhenge av av hastigheten så vel som akselerasjonen. Fra (2.38) og (2.39) finner vi Poyntings vektor (energistrømtetthet) i radiell retning i observatørsystemet:

$$\begin{aligned} [\vec{S} \cdot \vec{n}]_{t'=t-\frac{R(t')}{c}} &= \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot \vec{n} \Big|_{t'=t-\frac{R(t')}{c}} \\ &= \frac{e^2 c \mu_0}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{R^2} \left| \frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3} \right|^2 \right]_{t'=t-\frac{R(t')}{c}} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Her ser vi det er to typer relativistiske effekter tilstede. En er vinkelen mellom $\vec{\beta}$ og $\dot{\vec{\beta}}$. Den andre er faktorene $(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})$, som når $\beta \rightarrow 1$ vil bestemme nær hele vinkelavhengigheten.

$[\vec{S} \cdot \vec{n}]_{ret} dt$ representerer energi per kvadratmeter målt ved et observasjonspunkt i tidsrommet $(t, t + dt)$, emitert fra en ladning ved den retarderte tiden t' . Da vil $(\vec{S} \cdot \vec{n}) \frac{dt}{dt'} dt'$ også representere energi per kvadratmeter, nå som funksjon av tidspunktet ved emisjonen, t' . Det er derfor naturlig å definere utstrålt effekt per romvinkelenhet som

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = R^2 (\vec{S} \cdot \vec{n}) \frac{dt}{dt'} = R^2 \vec{S} \cdot \vec{n} (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}) \quad (2.50)$$

Her legger vi merke til at siden

$$\vec{S} \propto \vec{E} \times \vec{B} \propto |\vec{E}|^2, \quad (2.51)$$

vil å ta med hastighetsfeltene gi et bidrag av orden

$$\left(\frac{dP(t')}{d\Omega} \right)_{\text{hastighetsfelter}} \propto R^{-1}$$

Dette bidrag kan neglisjeres ved store R .

Setter vi inn (2.49) i (2.50), får vi

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c} \frac{\left| \vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}] \right|^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^5} \quad (2.52)$$

Får å få et inntrykk av vinkelfordelingen på denne strålingen, antar vi akselerasjonen skjer over et litetidsrom der $\vec{\beta}$, $\dot{\vec{\beta}}$, \vec{n} og R er omtrent konstant. Først ser vi på to spesialtilfeller.



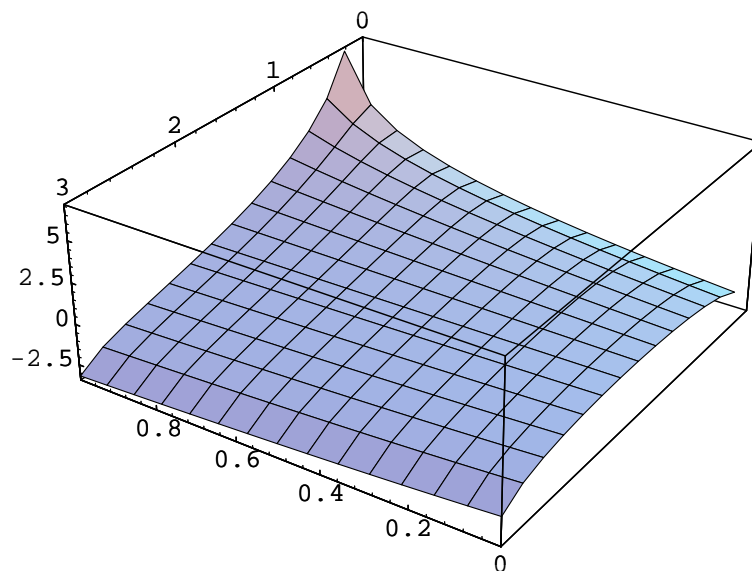
Figur 2.2: Utstrålt effekt per romvinkelenhet i enheter av $\frac{e^2 \dot{v}^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3}$, fra en ladning som akselereres parallelt med hastigheten, som funksjon av β og θ (stråleretning i forhold til hastighetsretning). Nær $(\theta, \beta) = (0, 1)$ er utstrålt effekt ikke begrenset til boksens høyde, slik som en kan få inntrykk av på figuren.

2.5.1 Akselerasjon parallelt med hastigheten

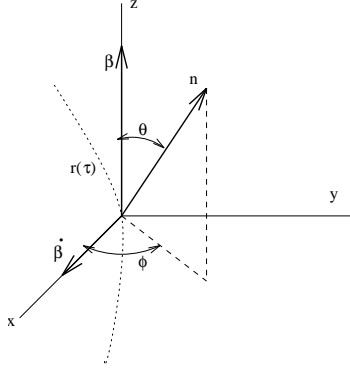
Om $\dot{\vec{\beta}} \parallel \vec{\beta}$ og $\theta = \angle(\vec{n}, \vec{\beta})$ vil (2.52) reduseres til

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{v}^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \quad (2.53)$$

I Figur 2.2 har vi vist vinkel- og hastighetsavhengigheten i dette effektuttrykket. Legg merke til at ved lave hastigheter ($\beta \rightarrow 0$) utstråles maksimalt effekt normal på hastighetsretningen, mens ved sterkt relativistiske hastigheter ($\beta \rightarrow 1$) utstråles maksimal effekt nesten parallelt til hastighetsretningen. For å få et inntrykk av hvor mye mer effekt som utstråles ved relativistiske hastigheter enn ved



Figur 2.3: Logaritmisk utstrålt effekt per romvinkelenhet, i enheter av $\frac{e^2 \dot{v}^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3}$, fra en ladning som akselereres parallelt med hastigheten, som funksjon av β og θ (stråleretning i forhold til hastighetsretning).



Figur 2.4:

ikke-relativistiske hastigheter, har vi i Figur 2.3 vist utstrålt effekt på logaritmisk skala. Vinkelen θ_{max} der intensiteten er maksimal finnes ved derivasjon av (2.53):

$$\theta_{max} = \arccos \left[\frac{1}{3\beta} (\sqrt{1 + 15\beta^2} - 1) \right] \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} \frac{1}{2\gamma} \quad (2.54)$$

I grensen $\beta \rightarrow 1$ får vi ved innsetting i (2.53) maksimal intensitet:

$$\left. \frac{dP(t')}{d\Omega} \right|_{\theta=\theta_{max}} \propto \frac{\left(\frac{1}{2\gamma}\right)^2}{\left(1 - \left(1 - \left(\frac{1}{2\gamma}\right)^2\right)\right)^5} \propto \gamma^8 \quad (2.55)$$

Konklusjonen blir at ved relativistiske hastigheter og akselerasjon parallelt med hastigheten, vil nesten all energien utstråles i et lite vinkelområde om hastighetsretningen

Om vi integrerer (2.53) over alle romvinkler, finner vi instantant ustrålt effekt:

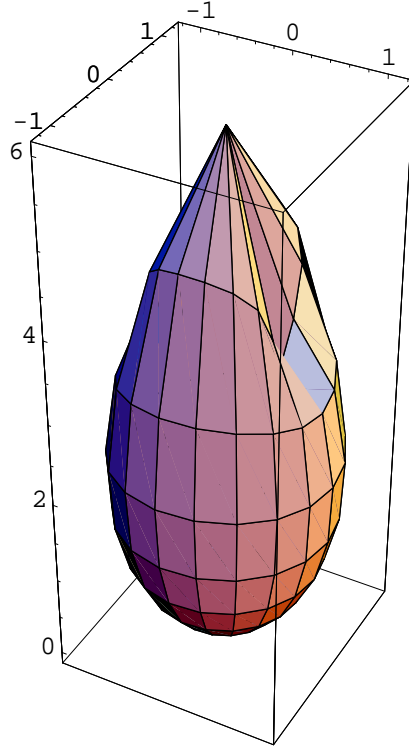
$$P(t') = \frac{1}{6\pi} \frac{e^2}{\epsilon_0 c^3} \dot{u}^3 \gamma^6 \quad (2.56)$$

som samsvarer med Liénard-resultatet (2.48) for spesialtilfellet $\dot{\vec{\beta}} \parallel \vec{\beta}$.

2.5.2 Akselerasjon normalt på hastigheten

Om $\dot{\vec{\beta}} \perp \vec{\beta}$ og θ, ϕ er som vist på Figur 2.4, vil ligning (2.52) reduseres til

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c} \frac{\left| \vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}] \right|^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^5}$$



Figur 2.5: Logaritmisk utstrålt effekt i enheter av $\frac{e^2 \dot{v}^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3}$, for $\beta = 0.99$, som funksjon av romvinkel. Avstanden fra origo til et punkt på overflaten angir utstrålt effekt i denne retningen. Strålingen er sterkt konsentrert fremover.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{e^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c} \frac{\left| (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \vec{n} - (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \dot{\vec{\beta}} - \dot{\vec{\beta}} + (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \dot{\vec{\beta}} \right|^2}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \\
 &= \frac{e^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c} \frac{\left| (\dot{\beta} \sin \theta \cos \phi) \vec{n} - (\dot{\beta} \sin \theta \cos \phi) \dot{\vec{\beta}} - \dot{\vec{\beta}} + (\beta \cos \theta) \dot{\vec{\beta}} \right|^2}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \quad (2.57)
 \end{aligned}$$

som en etter en del regning kan skrives

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3} \frac{|\dot{\vec{v}}|^2}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \left[1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} \right] \quad (2.58)$$

Vi legger merke til at selv om den detaljerte vinkelfordeling er forskjellig fra tilfellet med lineær akselerasjon, så finnes den samme karakteristiske energitopp ved små θ . I Figur (2.5) er **logaritmen** til utstrålt effekt vist som funksjon av romvinkel for tilfellet $\beta = 0.99$. Legg merke til at utstrålt effekt i foroverretningen dominerer sterkt.

Total utstrålt effekt kan finnes ved å integrere (2.58) over alle romvinkler,

$$P(t') = \frac{1}{6\pi} \frac{e^2 |\dot{\vec{v}}|^2}{\epsilon_0 c^3} \gamma^4 \quad (2.59)$$

Ved ikke-relativistiske hastigheter ($\gamma \rightarrow 1$), reduseres (2.59) til Larmorformelen (2.41).

2.5.3 Energiutbyttet sammenlignet

Vi vil nå sammenligne utstrålt effekt i tilfellene med parallell akselerasjon og normal akselerasjon. Påtrykt kraft kan ved bruk av (2.47) skrives

$$\vec{F} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(\gamma m \vec{v})}{dt} = \gamma m \dot{\vec{v}} + m \vec{v} \gamma^3 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \quad (2.60)$$

For en gitt størrelsesorden på kraften som virker på ladningen, hvilken type akselerasjon gir størst energiutbytte? For sirkulær bevegelse får vi $\vec{F} = \gamma m \dot{\vec{v}}$. Fra ligning (2.59) finner vi

$$P_{sirkel}(t') = \frac{1}{6\pi} \frac{e^2}{\epsilon_0 m^2 c^3} \gamma^2 \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)^2 \quad (2.61)$$

For endimensjonal lineær bevegelse derimot, vil (2.42) reduseres til

$$P_{rettlinjet} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left(\frac{dp}{dt} \right)^2 \quad (2.62)$$

Sammenligner vi disse to, ser vi at for en gitt størrelsesorden av påtrykt kraft, vil totalt utstrålt effekt ved akselerasjon normalt på hastigheten være en faktor γ^2 større enn ved parallell akselerasjon. I en lineær akselerator der ladete partikler akselereres til hastigheter nær c , vil derfor strålingstapet være veldig mye mindre enn i en tilsvarende sirkulær akselerator.

For en **partikkel i tilfeldig, ekstrem relativistisk bevegelse**, kan strålingen i et gitt øyeblikk tolkes som en superposisjon av bidrag fra akselerasjon normalt på og parallelt med banen. Men siden strålingen fra parallellkomponenten er neglisjerbar til orden $1/\gamma^2$ i forhold til den fra normalkomponenten, kan en se bort fra parallellkomponenten til strålingen, og approksimere strålingsintensiteten ved uttrykket for normalkomponenten (2.59).

2.6 Frekvensfordeling av utstrålt energi

Hittil har vi sett på totalt emittert effekt og emittert effekt i en romvinkelretning. I dette avsnittet skal vi prøve å finne utstrålt energi per frekvensenhet og romvinkelenhet.

Fra (2.38) og (2.49) er det klart at effekt utstrålt per romvinkelenhet i observatørsystemet generelt kan skrives

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = |\vec{A}(t)|^2 \quad (2.63)$$

der

$$\vec{A}(t) = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 c}} [R\vec{E}]_{t'=t-\frac{R(t')}{c}} \quad (2.64)$$

\vec{E} er her det elektriske feltet gitt ved (2.39). Vi ser på akselerasjon over et begrenset tidsrom, slik at totalt utstrålt energi er endelig.

Total utstrålt energi per romvinkelenhet får vi om vi integrerer over tiden:

$$\frac{dE}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{A}(t)|^2 dt \quad (2.65)$$

Dette kan alternativt uttrykkes som et integral over frekvensspekteret. Om ω er frekvens¹,

$$\vec{A}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{A}(t) e^{i\omega t} dt \quad (2.66)$$

og

$$\vec{A}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{A}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.67)$$

får vi

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\Omega} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \vec{A}^*(\omega') \cdot \vec{A}(\omega) e^{i(\omega' - \omega)t} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{A}(\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} \frac{d^2 I(\omega, \vec{n})}{d\omega d\Omega} d\omega \end{aligned} \quad (2.68)$$

Her har vi begrenset oss til positive frekvenser, og definert *ustrålt energi per romvinkelenhet og frekvensintervall* som²

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = |\vec{A}(\omega)|^2 + |\vec{A}^*(-\omega)|^2 = 2|A(\omega)|^2 \quad (2.69)$$

¹Vi kommer til å nytte ordet frekvens om det som tradisjonelt kalles vinkelfrekvens, ω . Denne avviker fra 'virkelig' frekvens f med en konstant $f = \frac{\omega}{2\pi}$.

²Her har vi brukt at siden vi ser på reelle elektriske felt \vec{E} , og dermed reelle $A(t)$, ser en fra definisjonen (2.66) at $A^*(\omega) = A(-\omega)$.

En kan spørre seg hvor frekvensen kommer fra, idet hverken (2.38), (2.39) eller andre tidligere uttrykk har inneholdt noen frekvens. Svaret ligger i (2.66) og (2.67). Vi dekomponerte energi-amplituden $\vec{A}(t)$ i et integral over Fourier-komponenter $e^{i\omega t}$, hver med amplitude $\vec{A}(\omega)$. Dermed har vi definisjonen på det vi vil velge å kalle frekvens i (2.67).

For å komme videre setter vi akselerasjonsfeltet fra (2.39) inn i (2.66). Dermed blir

$$\vec{A}(\omega) = \sqrt{\frac{e^2 \mu_0 c}{32\pi^3}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3} \right)_{t'=t-\frac{R(t')}{c}} e^{i\omega t} dt \quad (2.70)$$

Eventuelt kan vi uttrykke $\vec{A}(\omega)$ i partikkelens hvilesystem (ved hjelp av (B.11)) som

$$\vec{A}(\omega) = \sqrt{\frac{e^2 \mu_0 c}{32\pi^3}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^2} \right) e^{i(t'+\frac{R(t')}{c})} dt' \quad (2.71)$$

Om observasjonspunktet ligger langt unna origo ($\Rightarrow |\vec{x}|$ 'stor'), samtidig som akselerasjonen skjer i nærheten av origo ($\Rightarrow |\vec{r}|$ 'liten'), er enhetsvektoren $\vec{n} = [\vec{x} - \vec{r}(t')]/R$ tilnærmet konstant i tid, slik at vi tilnærmet har

$$R(t') = |\vec{x} - \vec{r}(t')| \approx |\vec{x}| - \vec{n} \cdot \vec{r}(t') \quad (2.72)$$

Ved innsetting i (2.69) finner vi utstrålt energi per enhets frekvensintervall i retning \vec{n}

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \mu_0 c}{16\pi^3} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^2} e^{i\omega(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}(t)}{c})} dt \right|^2 \quad (2.73)$$

For enkelthets skyld har vi skrevet t istedenfor t' . For en gitt bevegelse $\vec{r}(t)$ kan vi regne ut $\vec{\beta}(t)$ og $\dot{\vec{\beta}}(t)$, og integralet kan evalueres som en funksjon av \vec{n} og ω . Dermed finner vi frekvensspektrumet for effekt.

I Appendiks B.2 har vi vist hvordan vi kan omskrive (2.73) til

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \mu_0 c \omega^2}{16\pi^3} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta}) e^{i\omega(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}(t)}{c})} dt \right|^2 \quad (2.74)$$

For flere ladninger e_i i akselerert bevegelse lar man

$$e \vec{\beta} e^{-i(\omega/c)\vec{n} \cdot \vec{r}(t)} \rightarrow \sum_{i=1}^N e_i \vec{\beta}_i e^{-i(\omega/c)\vec{n} \cdot \vec{r}_i(t)} \quad (2.75)$$

i integranden i (2.74). For en kontinuerlig distribusjon av ladninger vil summen over i gå over til et integral som så substitueres i integranden i (2.74):

$$e \vec{\beta} e^{-i(\omega/c)\vec{n} \cdot \vec{r}(t)} \rightarrow \frac{1}{c} \int d^3 x \vec{j}(\vec{x}, t) e^{-i\omega[t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{c}]} \quad (2.76)$$

Dette kunne vært funnet direkte ved å løse den inhomogene bølgeligningen (2.16) for en kontinuerlig ladningsdistribusjon.

Vi definerer nå firebølgevektoren k^μ :

$$k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \frac{\omega}{c}\vec{n}\right) = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right) \quad (2.77)$$

Ved å innføre den Fouriertransformerte av den elektriske strømvektoren

$$\vec{j}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^4}} \int d^3\vec{x} dt \vec{j}(\vec{x}, t) e^{ik_\mu x^\mu} \quad (2.78)$$

så blir ustrålt energi per frekvensintervall per romvinkel for en kontinuerlig distribusjon av ladninger

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{\mu_0 \omega^2 \pi}{c} \left| \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{j}(\vec{k}, \omega)) \right|^2 \quad (2.79)$$

Siden \vec{n} har enhets lengde, og $\vec{n} \times \vec{j}$ står normalt på \vec{n} , så gjelder

$$\left| \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{j}(\vec{k}, \omega)) \right|^2 = \left| \vec{n} \times \vec{j}(\vec{k}, \omega) \right|^2 \quad (2.80)$$

Dette kan vi sette inn i (2.79). Vi får da

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{\mu_0 \omega^2 \pi}{c} \left| \vec{n} \times \vec{j}(\vec{k}, \omega) \right|^2 \quad (2.81)$$

Dette kunne ha vært gjort på et tidligere tidspunkt, men vi har brukt og vil heretter bruke, formen (2.79), da den samsvarer med Jackson[3], ligning (14.70).

For å finne emittert energi som funksjon av frekvens og utsendt retning, trenger vi altså stort sett bare å Fouriertransformere den elektriske strømvektoren. I Kapittel 4 skal vi eksplisitt gjøre det for et elektron i sirkelbevegelse.

Kapittel 3

Gravitasjonsstråling

På samme måte som vi for elektromagnetisk stråling tok utgangspunkt i Maxwells ligninger i vakuum og utledet forskjellige uttrykk for elektromagnetisk stråling, tar vi her utgangspunkt i Einsteins feltligninger. Vi skal prøve å finne utstrålt energi, som følge av små variasjoner i metrikken. Vi bruker en analog fremgangsmåte til den vi brukte i Kapittel 2. Det vil blant annet vise seg at energi-impulstensoren blir en slags analog til den elektriske strømmen.

På grunn av den ekstra kompleksiteten til størrelser og uttrykk i den generelle relativitetsteorien i forhold til analoge størrelser og uttrykk i elektromagnetismen, så klarer vi ikke å finne enkle formler for utstrålt effekt analoge til for eksempel Liénards formel (2.48). Det er heller ikke lett å konstruere almenlydige figurer over emittert energi som funksjon av romvinkelretning analoge til figurene i Kapittel 2. Men vi greier via frekvensoppløsning, å finne utstrålt energi per romvinkelretning og frekvensintervall tilsvarende ligning (2.79).

3.1 Einsteins feltligninger

Vi tar utgangspunkt i Einsteins feltligninger på formen (Weinberg[4], (7.1.4) og(7.1.12)):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi GT_{\mu\nu}}{c^4} \quad (3.1)$$

Definisjonen av størrelsene som inngår er som følger:

- G er *gravitasjonskonstanten*.
- $g_{\mu\nu}$ er den metriske tensor.

- *Konneksjonskoeffesientene* (eller Christoffelsymbolene) er

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}(g_{\nu\sigma,\mu} + g_{\mu\sigma,\nu} - g_{\nu\mu,\sigma}) \quad (3.2)$$

- $R_{\mu\kappa\nu}^{\lambda}$ er *Riemann-Christoffel krumningstensoren*

$$R_{\mu\kappa\nu}^{\lambda} \equiv \frac{\partial\Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} + \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta}\Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\eta}\Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} \quad (3.3)$$

- *Riccitensoren* er

$$R_{\mu\nu} = g^{\lambda\kappa}R_{\lambda\mu\kappa\nu} = g^{\lambda\kappa}g_{\lambda\sigma}R_{\mu\kappa\nu}^{\sigma} \quad (3.4)$$

- *Skalarkrumningen* R er

$$R \equiv g^{\lambda\kappa}g^{\mu\nu}R_{\lambda\mu\kappa\nu} = g^{\lambda\kappa}g^{\mu\nu}g_{\lambda\sigma}R_{\mu\kappa\nu}^{\sigma} \quad (3.5)$$

- $T^{\mu\nu}$ er *energi-impulstensoren*, som for et system av n partikler tar formen (Weinberg[4], (2.8.3))

$$T^{\mu\nu} = \sum_n p_n^{\mu} \frac{dx_n^{\nu}(t)}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (3.6)$$

der p_n og x_n er henholdsvis energi-impulsfirevektor og posisjonsfirevektor til partikkel n .

Ved å multiplisere ligning (3.1) med $g^{\mu\nu}$ finner vi

$$R = \frac{8\pi}{c^4}GT^{\mu\nu} \quad (3.7)$$

og dermed kan (3.1) skrives

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^{\lambda}_{\lambda}) \quad (3.8)$$

Dette er fremdeles Einsteins feltligninger, bare på en litt annen form. Det er disse vi skal bruke i forsettelsen.

For å lette regningen, og for å gjøre energi-impulstensoren symmetrisk, setter vi fra nå av $c = 1$.

3.1.1 Koordinatbetingelser

Vi skal se litt på hvilken frihet vi har i valg av koordinatsystem. Dette er analogt til det elektromagnetiske tilfellet, der vi jo hadde en viss frihet i valg av de elektromagnetiske potensialene A^μ . Den symmetriske tensoren

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (3.9)$$

har 10 uavhengige komponenter, så ligning (3.1) gir 10 algebraisk uavhengige ligninger. Siden $g_{\mu\nu}$ har 10 uavhengige komponenter skulle en i utgangspunktet tro at Einsteins feltligninger bestemmer $g_{\mu\nu}$ unikt. Men de fire Bianchi-identitetene (Weinberg[4], Kapittel 7.4)

$$G_{\nu,\mu}^\mu + \Gamma_{\mu\kappa}^\mu G_\nu^\kappa - \Gamma_{\nu\mu}^\kappa G_\kappa^\mu = 0 \quad (3.10)$$

fører til $10 - 4 = 6$ uavhengige ligninger, slik at en har fire frihetsgrader i valg av $g_{\mu\nu}$. Disse frihetsgradene tilsvarer det faktum at hvis $g_{\mu\nu}$ er en løsning av (3.1), vil også $g'_{\mu\nu}$ være det, der $g'_{\mu\nu}$ er bestemt fra $g_{\mu\nu}$ ved en generell koordinattransformasjon $x \rightarrow x'$. Vi kan velge et spesielt koordinatsystem ved å spesifisere 4 uavhengige *koordinatbetingelser*, og dermed fjerne de 4 frihetsgradene i valg av $g_{\mu\nu}$.

Et spesielt greit valg av koordinatsystem er representert av de *harmoniske koordinatbetingelser*

$$\Gamma^\lambda \equiv g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0 \quad (3.11)$$

En kan vise at det alltid er mulig å velge et slikt koordinatsystem (Weinberg[4], Kapittel 7.4).

3.2 Svakt felt approksimasjonen

Her skal vi se på løsninger av Einsteins feltligninger (3.8) for svake felt. Dette forenkler ligningene uten at en mister mye fysisk innsikt. En grunn er at observerbar gravitasjonstråling trolig vil ha veldig liten intensitet. En annen grunn er at det kun er mulig å klart definere elementærpartikler når de er langt borte fra alle andre partikler, og for *gravitoner* tilsvarer dette en svak-felt løsning av feltligningene. Men vår kanskje viktigste grunn er at i hele vårt solsystem, unntatt svært nær soloverflaten, er gravitasjonsfeltene relativt svake.

Vi antar at metrikken $g_{\mu\nu}$ er nær *Minkowski-metrikken* $\eta_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (3.12)$$

der $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Siden $g_{\mu\nu,\lambda} = h_{\mu\nu,\lambda}$ har vi at til første orden i h blir Riccitenoren (3.4)

$$R_{\mu\nu} \simeq \Gamma_{\lambda\mu,\nu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^\lambda + \mathcal{O}(h^2) \quad (3.13)$$

og konneksjonskoeffesienten (3.2)

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}\eta^{\sigma\lambda}(h_{\nu\sigma,\mu} + h_{\mu\sigma,\nu} - h_{\nu\mu,\sigma}) + \mathcal{O}(\langle \epsilon \rangle) \quad (3.14)$$

Siden vi regner til første orden i h , blir alle indekser nå hevet og senket ved bruk av Minkowski-metrikken. Dermed blir første ordens Riccitenor

$$R_{\mu\nu} \simeq R_{\mu\nu}^{(1)} \equiv \frac{1}{2} \left(\square h_{\mu\nu} - h_{\nu,\lambda\mu}^\lambda - h_{\mu,\nu\lambda}^\lambda + h_{\lambda,\nu\mu}^\lambda \right) \quad (3.15)$$

For å forenkle feltligningene ytterligere velger vi et harmonisk koordinatsystem (jfr. Kapittel 3.1.1). Dette er analog med at vi i det elektromagnetiske tilfellet valgte å transformere potensialet A^μ slik at det oppfylte Lorentz-betingelsen (2.15).

Bruker en konneksjonskoeffesienten (3.14) i de harmoniske koordinatbetingelsene (3.11), gir dette til første orden

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu} \frac{1}{2} \eta^{\sigma\lambda} (h_{\nu\sigma,\mu} + h_{\mu\sigma,\nu} - h_{\nu\mu,\sigma}) &= \frac{1}{2} (h_{,\mu}^{\mu\lambda} + h_{,\nu}^{\nu\lambda} - n^{\lambda\sigma} h_{\mu,\sigma}^\mu) = 0 \\ \Rightarrow h_{\lambda,\mu}^\mu &= \frac{1}{2} h_{\mu,\lambda}^\mu \end{aligned} \quad (3.16)$$

Bruker vi (3.16) forenkles Riccitenoren (3.15) til

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h_{\lambda,\nu\mu}^\lambda - \frac{1}{2} h_{\lambda,\nu\mu}^\lambda + h_{\lambda,\nu\mu}^\lambda \right) = \frac{1}{2} \square h_{\mu\nu} \quad (3.17)$$

Innsatt i feltligningene (3.8) får vi

$$\square h_{\mu\nu} = -16\pi G S_{\mu\nu} \quad (3.18)$$

der

$$S_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T^\lambda_\lambda \quad (3.19)$$

Legg merke til analogien med ligningen for de elektromagnetiske potensialene (2.16). Vi merker oss også at det her er snakk om 16 ligninger (hvorav 10 lineært uavhengige), mens det i det elektromagnetiske tilfellet var snakk om 4.

Helt analogt med løsningen av ligning (2.16), ligning (2.32), kan vi nå finne en løsning her: Det *retarderte potensial*

$$h_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = 4G \int d^3\vec{x}' \frac{S_{\mu\nu}(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (3.20)$$

Denne tolkes som gravitasjonsstråling produsert av kilden $S_{\mu\nu}$. Tidsargumentet $t - |\vec{x} - \vec{x}'|$ viser at gravitasjonsstråling analogt med elektromagnetisk stråling propagerer med lysets hastighet ($c = 1$ her).

I avsnitt 3.4 og 3.5 skal vi bruke (3.20) til å finne utstrålt energi per romvinkelhet og frekvensenhet.

3.3 Planbølger

Vi skal seinere omskrive den generelle løsningen (3.20) av bølgligningen (3.18), ved å la $r \rightarrow \infty$, til en superposisjon av planbølger. Derfor ser vi nå på planbølgeløsninger til (3.20) uten kildeledd,

$$\square h_{\mu\nu} = 0 \quad (3.21)$$

En generell løsning av den homogene ligningen (3.21), kan uttrykkes som en superposisjon av planbølgeløsninger på formen

$$h_{\mu\nu} = d_{\mu\nu} e^{-ik_\lambda x^\lambda} + d_{\mu\nu}^* e^{ik_\lambda x^\lambda} \quad (3.22)$$

Denne tilfredstiller (3.21) om

$$k_\lambda k^\lambda = 0 \quad (3.23)$$

og de harmoniske koordinatbetingelser (3.16), om

$$k_\mu d_\nu^\mu = \frac{1}{2} k_\nu d_\mu^\mu \quad (3.24)$$

Siden $h_{\mu\nu}$ er symmetrisk, vil matrisen $d_{\mu\nu}$ være symmetrisk:

$$d_{\mu\nu} = d_{\nu\mu} \quad (3.25)$$

Denne matrisen kalles *polarisasjonstensoren*. Som før nevnt har en symmetrisk 4x4 matrise 10 uavhengige komponenter. De 4 ligningene (3.24) bringer dette antallet ned til $10-4=6$. I tillegg må vi kunne forandre kordinatsystemet ved å la $x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^\mu(x)$, slik at en reelt bare har 2 frihetsgrader i valg av $d_{\mu\nu}$.

3.3.1 Riccitenoren av orden 2 i $h_{\mu\nu}$ for en planbølge.

Vi skal seinere få bruke for de leddene i Riccitenoren der $h_{\mu\nu}^2$ inngår, $R_{\mu\nu}^{(2)}$. Ved innsetting i (3.4) finner vi

$$R_{\mu\nu}^{(2)} = -\frac{1}{2} h^{\lambda\kappa} [h_{\lambda\kappa,\nu\mu} - h_{\mu\kappa,\nu\lambda} - h_{\lambda\nu,\kappa\mu} + h_{\mu\nu,\kappa\lambda}]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} [2h_{\sigma,\kappa}^{\kappa} - h_{\kappa,\sigma}^{\kappa}] [h_{\mu,\nu}^{\sigma} + h_{\nu,\mu}^{\sigma} - h_{\mu\nu}^{\sigma}] \\
& - \frac{1}{4} [h_{\sigma\nu,\lambda} + h_{\sigma\lambda,\nu} - h_{\lambda\nu,\sigma}] [h_{\mu}^{\sigma,\lambda} + h_{\mu}^{\sigma\lambda} - h_{\mu}^{\lambda,\sigma}] \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Vi får bruk for $\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle$, det vil si $R_{\mu\nu}^{(2)}$ midlet over store avstander i tid og rom i forhold til bølgelengden $\sim 1/|\vec{k}|$. Setter vi inn planbølgen (3.22) vil midlingen føre til at alle ledd proporsjonal med $\exp(\pm 2ik_{\lambda}x^{\lambda})$ forsvinner:

$$\begin{aligned}
\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle &= -(-i)^2 \frac{1}{2} d^{\lambda\kappa} [k_{\nu}k_{\mu}d_{\lambda\kappa}^* - k_{\nu}k_{\lambda}d_{\mu\kappa}^* - k_{\kappa}k_{\mu}d_{\lambda\nu}^* + k_{\kappa}k_{\lambda}d_{\mu\nu}^*] \\
& - \frac{1}{2} i^2 d^{*\lambda\kappa} [k_{\nu}k_{\mu}d_{\lambda\kappa} - k_{\nu}k_{\lambda}d_{\mu\kappa} - k_{\kappa}k_{\mu}d_{\lambda\nu} + k_{\kappa}k_{\lambda}d_{\mu\nu}] \\
& + \frac{1}{4} i(-i) [2k_{\kappa}d_{\sigma}^{\kappa} - k_{\sigma}d_{\kappa}^{\kappa}] [k_{\nu}d_{\mu}^{*\sigma} + k_{\mu}d_{\nu}^{*\sigma} - k^{\sigma}d_{\mu\nu}^*] \\
& + \frac{1}{4} (-i)i [2k_{\kappa}d_{\sigma}^{*\kappa} - k_{\sigma}d_{\kappa}^{*\kappa}] [k_{\nu}d_{\mu}^{\sigma} + k_{\mu}d_{\nu}^{\sigma} - k^{\sigma}d_{\mu\nu}] \\
& - \frac{1}{4} i(-i) [k_{\lambda}d_{\sigma\nu} + k_{\nu}d_{\sigma\lambda} - k_{\sigma}d_{\lambda\nu}] [k^{\lambda}d_{\mu}^{*\sigma} + k_{\mu}d^{*\sigma\lambda} - k_{\sigma}d_{\mu}^{*\lambda,\sigma}] \\
& - \frac{1}{4} (-i)i [k_{\lambda}d_{\sigma\nu}^* + k_{\nu}d_{\sigma\lambda}^* - k_{\sigma}d_{\lambda\nu}^*] [k^{\lambda}d_{\mu}^{\sigma} + k_{\mu}d^{\sigma\lambda} - k^{\sigma}d_{\mu}^{\lambda}] \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Ved å benytte at $d_{\mu\nu} + d_{\mu\nu}^* = 2\text{Re}(d_{\mu\nu})$ får vi

$$\begin{aligned}
\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle &= \text{Re}\{d^{*\lambda\kappa} [k_{\nu}k_{\mu}d_{\lambda\kappa} - k_{\nu}k_{\lambda}d_{\mu\kappa} - k_{\kappa}k_{\mu}d_{\lambda\nu} + k_{\kappa}k_{\lambda}d_{\mu\nu}] \\
& + [k_{\kappa}d_{\sigma}^{*\kappa} - \frac{1}{2}k_{\sigma}d_{\kappa}^{*\kappa}] [k_{\nu}d_{\mu}^{\sigma} + k_{\mu}d_{\nu}^{\sigma} - k^{\sigma}d_{\mu\nu}] \\
& - \frac{1}{2} [k_{\lambda}d_{\sigma\nu}^* + k_{\nu}d_{\sigma\lambda}^* - k_{\sigma}d_{\lambda\nu}^*] [k^{\lambda}d_{\mu}^{\sigma} + k_{\mu}d^{\sigma\lambda} - k^{\sigma}d_{\mu}^{\lambda}]\} \quad (3.28)
\end{aligned}$$

Vi har at $d_{\lambda}^{*\lambda}d_{\kappa}^{\kappa} = |d_{\lambda}^{\lambda}|^2$. Bruker vi i tillegg bølgevektorbetingelsen (3.23) og de harmoniske koordinatbetingelsene (3.24), kan vi redusere (3.28) til

$$\begin{aligned}
\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle &= k_{\mu}k_{\nu}\text{Re}\{d^{*\lambda\kappa}d_{\lambda\kappa} + |d_{\lambda}^{\lambda}|^2[-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}] \\
& - \frac{1}{2}d^{*\lambda\kappa}d_{\lambda\kappa} + |d_{\lambda}^{\lambda}|^2[+\frac{1}{8} + \frac{1}{8}]\} \quad (3.29)
\end{aligned}$$

Videre regning gir

$$\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{2} [d^{*\lambda\kappa}d_{\lambda\kappa} - \frac{1}{2}|d_{\lambda}^{\lambda}|^2] \quad (3.30)$$

Denne får vi bruk for i avsnitt 3.5.

3.4 Feltet i bølgesonen

Vi uttrykker energi-impulstensoren som et Fourier-integral

$$T_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega T_{\mu\nu}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} \quad (3.31)$$

Omvendt har vi som vanlig

$$T_{\mu\nu}(\vec{x}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt T_{\mu\nu}(\vec{x}, t) e^{i\omega t} \quad (3.32)$$

For å begrense oss til positive frekvenser bruker vi at siden energi-impulstensoren er reell, vil $T_{\mu\nu}(\vec{x}, \omega) = T_{\mu\nu}^*(\vec{x}, -\omega)$, og omskriver (3.31) til

$$T_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} d\omega T_{\mu\nu}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} d\omega T_{\mu\nu}^*(\vec{x}, \omega) e^{i\omega t} \quad (3.33)$$

Fra (3.20) finner vi nå at feltet som skyldes kilden $T_{\mu\nu}$ er

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}(\vec{x}, t) &= \frac{4G}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} d\omega \int d^3\vec{x}' \frac{S_{\mu\nu}(\vec{x}', \omega) e^{-i\omega(t-|\vec{x}-\vec{x}'|)}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \\ &+ \frac{4G}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} d\omega \int d^3\vec{x}' \frac{S_{\mu\nu}^*(\vec{x}', \omega) e^{i\omega(t-|\vec{x}-\vec{x}'|)}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \end{aligned} \quad (3.34)$$

der

$$S_{\mu\nu}(\vec{x}, \omega) \equiv T_{\mu\nu}(\vec{x}, \omega) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T_{\lambda}^{\lambda}(\vec{x}, \omega) \quad (3.35)$$

For å komme videre antar vi at vi observerer strålingen i *bølgesonen*, det vil si ved avstander $|\vec{x}|$ mye større enn utstrekningen på kilden: $|\vec{x}| \gg |\vec{x}'|_{maksimal}$, og også mye større $\omega|\vec{x}'|$ og $1/\omega$. Dette er helt analogt til approksimasjonen vi gjorde for det elektromagnetiske feltet (2.72). I nevneren approksimeres $|\vec{x}-\vec{x}'|$ med r mens vi i eksponenten setter

$$|\vec{x}-\vec{x}'| \approx r - \vec{x}' \cdot \hat{x} \quad \hat{x} \equiv \frac{\vec{x}}{r}$$

Da kan vi tilnærmet skrive feltet som et integral over planbølger

$$h_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = \int_0^{\infty} d\omega d_{\mu\nu}(\vec{x}, \omega) e^{-ik_{\mu}x^{\mu}} + \int_0^{\infty} d\omega d_{\mu\nu}^*(\vec{x}, \omega) e^{+ik_{\mu}x^{\mu}} \quad (3.36)$$

Her har vi definert

- *Bølgevektor*:

$$k^u \equiv (\omega, \vec{k}) = (\omega, \omega \hat{x}) \quad (3.37)$$

- *Polarisasjonstensor:*

$$d_{\mu\nu}(\vec{x}, \omega) \equiv \frac{4G}{r\sqrt{2\pi}} \int d^3\vec{x}' S_{\mu\nu}(\vec{x}', \omega) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}'} \quad (3.38)$$

Definisjonen av bølgevektor samsvarer med definisjonen av bølgevektor i det elektromagnetiske tilfellet, ligning (2.77).

Ved å innføre den Fouriertransformerte av $T_{\mu\nu}(\vec{x}', \omega)$,

$$T_{\mu\nu}(\vec{k}, \omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int d^3\vec{x}' T_{\mu\nu}(\vec{x}', \omega) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}'} \quad (3.39)$$

kan polarisasjonstensoren $d_{\mu\nu}$ skrives som

$$d_{\mu\nu}(\vec{x}, \omega) = \frac{4G}{r} \sqrt{2\pi}^2 [T_{\mu\nu}(\vec{k}, \omega) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T^\lambda{}_\lambda(\vec{k}, \omega)] \quad (3.40)$$

Vi har altså vist at om vi uttrykker energi-impulstensoren som et Fourierintegral (3.33), vil løsningen for svake felt (3.20) av Einsteins feltligninger (3.8) i bølgesonen bli tilnærmet en superposisjon av planbølger (3.36), der koeffisientene, eller polarisasjonstensoren (3.40), er gitt som en kombinasjon av den Fourieromvendte energi-impulstensoren. Dermed kan vi bruke resultater fra Kapittel 3.3 til å beregne energiutstrålingen.

3.5 Strålingsenergi

Det neste spørsmålet blir nå: Hvordan finne strålingsenergien i et svakt felt som (3.36)? I det elektromagnetiske tilfellet brukte vi den radielle komponenten av Poyntingvektoren, ligning (2.49). Det kan argumenteres for (jfr. Weinberg[4], Kapittel 7.6) at gravitasjonsfeltet selv gir et bidrag til energi-impulstensoren¹, nemlig

$$t_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{8\pi G} [R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^\lambda{}_\lambda - R_{\mu\nu}^{(1)} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R^{(1)\lambda}{}_\lambda] \quad (3.41)$$

Einsteins feltligninger til første orden i h (3.8) (som er de vi har tatt utgangspunkt i her), er i vakuum $R_{\mu\nu}^{(1)} = 0$, slik at i bølgesonen forenkles (3.41) til

$$t_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{8\pi G} [R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^\lambda{}_\lambda] \quad (3.42)$$

¹Om gravitasjonskrefter spiller en viktig rolle i systemet som studeres, må en erstatte energi-impulstensoren $T_{\mu\nu}$ med $\tau_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}$ i hele Kapittel 3.

Til orden h^2 gjelder derfor

$$t_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{8\pi G} [R^{(2)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\lambda}R_{\rho\lambda}^{(2)}] \quad (3.43)$$

Som for andre deler av energi-impulstensoren representerer t^{i0} komponentene energistrøm i \hat{x}_i -retningen (Weinberg[4], side 262). Siden $|\vec{x}| \gg 1/\omega$ kan vi bruke $\langle t^{i0} \rangle$, altså t^{i0} midlet over mange bølgelengder og perioder. Når vi setter inn (3.30) vil ikke $\eta^{\rho\lambda} \langle R_{\rho\lambda}^{(2)} \rangle$ gi bidrag siden vi har fra (3.23) at $k_\lambda k^\lambda = 0$. Energien emittert i en retning \hat{x} blir da for en planbølge (3.22) med frekvens ω

$$\frac{dI}{d\Omega d\omega} = r^2 \hat{x}^i \langle t^{i0} \rangle = r^2 \hat{x}^i \frac{k_i k_0}{16\pi G} \left(d^{\lambda\rho*} d_{\lambda\rho} - \frac{1}{2} |d^\lambda{}_\lambda|^2 \right) \quad (3.44)$$

Merk at våre resultater heretter vil avhenge av at $t_{\mu\nu}$ i (3.41) virkelig er gravitasjonsfeltets bidrag til energi-impulstensoren, og dermed at t^{i0} komponentene representerer energistrøm. Som nevnt i Kapittel 1 er det foreløpig få, eller ingen, eksperimentelle bevis på at det virkelig er slik. På samme måte avhenger mange av resultatene i elektromagnetismen av fortolkningen av Poyntings vektor \vec{S} som en energistrømvektor, men denne modellen verifiseres så og si daglig.

For å komme videre trenger vi:

$$\eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} = 1^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 = 4 \quad (3.45)$$

$$\eta^\lambda{}_\lambda = \eta^{\lambda\mu}\eta_{\mu\lambda} = 4 \quad (3.46)$$

I forrige avsnitt viste vi at veldig langt vekke fra kilden og origo, vil en vilkårlig energi-impulstensor kunne representeres som et frekvensintegral over planbølger med amplitude $d_{m\nu\nu}$ gitt ved (3.40). Vi tar nå for oss en planbølge komponent. Ved å sette inn (3.40) i (3.44) får vi

$$\begin{aligned} & d^{\lambda\rho*} d_{\lambda\rho} - \frac{1}{2} |d^\lambda{}_\lambda|^2 \\ &= \left(\frac{8\pi G}{r} \right)^2 [T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T^\lambda{}_\lambda] [T^{*\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}T^{*\lambda}{}_\lambda] \\ & \quad - \frac{1}{2} \left(\frac{8\pi G}{r} \right)^2 [T^\lambda{}_\lambda - \frac{1}{2}\eta^\lambda{}_\lambda T^\sigma{}_\sigma] [T^{*\lambda}{}_\lambda - \frac{1}{2}\eta^\lambda{}_\lambda T^{*\sigma}{}_\sigma] \\ &= \left(\frac{8\pi G}{r} \right)^2 T_{\mu\nu} T^{*\mu\nu} + \left(\frac{8\pi G}{r} \right)^2 |T^\lambda{}_\lambda|^2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2}[1 - 2 - 2 + 4] \right) \\ &= \left(\frac{8\pi G}{r} \right)^2 \left[T_{\mu\nu} T^{*\mu\nu} - \frac{1}{2} |T^\lambda{}_\lambda|^2 \right] \quad (3.47) \end{aligned}$$

Vi setter inn (3.37) for k^μ og (3.47) inn i (3.44) og får

$$\frac{dI}{d\Omega d\omega} = (4\pi G\omega^2) \left[T_{\mu\nu}(\vec{k}, \omega) T^{*\mu\nu}(\vec{k}, \omega) - \frac{1}{2} |T_\lambda^\lambda(\vec{k}, \omega)|^2 \right] \quad (3.48)$$

Dette er uttrykket for utstrålt energi i form av gravitasjonsstråling per frekvens og romvinkel enhet, gitt et svart varierende felt som (3.20). Det er en sum over 10 uavhengige ledd, der hvert ledd går som absoluttverdien av et element i den Fourieromvendte energi-impulstensoren i kvadrat. Det tilsvarende for elektromagnetisk stråling, (2.79), har en mye enklere form.

Det går an å forenkle energiuttrykket (3.48) noe. Vi har ennå ikke brukt at energi-impulstensoren er konservert,

$$T_{\nu,\mu}^\mu = 0 \quad (3.49)$$

Setter vi inn Fourierkomponenten (3.33) får vi

$$T_{\nu,i}^i(\vec{x}, \omega) - i\frac{\omega}{c} T_\nu^0(\vec{k}, \omega) = 0 \quad (3.50)$$

Dette multipliseres med $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ og integreres over \vec{x} , og vi finner

$$k_\mu T_\nu^\mu(\vec{k}, \omega) = 0 \quad (3.51)$$

Altså gjelder følgende sammenhenger:

$$T_{0i}(\vec{k}, \omega) = -\hat{k}^j T_{ji}(\vec{k}, \omega) \quad (3.52)$$

$$T_{00}(\vec{k}, \omega) = \hat{k}^i \hat{k}^j T_{ji}(\vec{k}, \omega) \quad (3.53)$$

Disse ligningene kan vi bruke til å redusere (3.48) til bare å inneholde romkomponenter.

Energi-impulstensoren er symmetrisk. I tillegg har vi

$$T^{*00} = \eta^{0\nu} \eta^{0\mu} T_{\mu\nu} = T_{00} \quad (3.54)$$

$$T^{*ij} = \eta^{i\nu} \eta^{j\mu} T_{\mu\nu} = T_{ij} \quad (3.55)$$

og tilsvarende $T_j^i = -T^{ij}$, $T^{0i} = -T_{0i}$ og $T_0^0 = T_{00}$. Dette, sammen med (3.52) og (3.53), bruker vi til å finne

$$\begin{aligned} & T_{\mu\nu} T^{*\mu\nu} - \frac{1}{2} |T_\lambda^\lambda|^2 \\ &= T_{00} T^{*00} + 2T_{0i} T^{*i0} + T_{ij} T^{*ij} - \frac{1}{2} [T_0^0 T_0^{*0} + T_0^0 T_i^{*i} + T_i^i T_0^{*0} + T_i^i T_l^l] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= T^{*ij}T^{lm}[\hat{k}_i\hat{k}_j\hat{k}_l\hat{k}_m - 2\delta_{il}\hat{k}_j\hat{k}_m + \delta_{il}\delta_{jm} \\
&\quad - \frac{1}{2}(\hat{k}_i\hat{k}_j\hat{k}_l\hat{k}_m - \delta_{lm}\hat{k}_i\hat{k}_j - \delta_{ij}\hat{k}_l\hat{k}_m + \delta_{ij}\delta_{lm})] \quad (3.56)
\end{aligned}$$

Nå kan vi sette inn i (3.48) og få utstrålt energi som funksjon av romdelen av energi-impulstensoren:

$$\frac{dI}{d\Omega d\omega} = (4\pi G\omega^2)\Lambda_{ij\ lm}(\hat{k})T^{ij*}(\vec{k}, \omega)T^{lm}(\vec{k}, \omega) \quad (3.57)$$

der

$$\begin{aligned}
\Lambda_{ij\ lm}(\hat{k}) \equiv &\delta_{il}\delta_{jm} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{lm} - 2\delta_{il}\hat{k}_j\hat{k}_m + \frac{1}{2}\delta_{lm}\hat{k}_i\hat{k}_j \\
&+ \frac{1}{2}\delta_{ij}\hat{k}_l\hat{k}_m + \frac{1}{2}\hat{k}_i\hat{k}_j\hat{k}_l\hat{k}_m \quad (3.58)
\end{aligned}$$

Umiddelbart kan dette se ut som alt annet enn en forenkling av uttrykket (3.48), men det er faktisk dette vi skal bruke i neste kapittel. Det gir emittert energi per romvinkel og frekvensintervall.

Om energi-impulstensoren er en sum av individuelle Fourierkomponenter vil energiutstrålingen I bli en dobbelsum, men alle kryssledd forsvinner ved å midle over et tidsrom større enn lengste periode. Utstrålt energi er da gitt ved en sum av ledd som i (3.57).

3.5.1 Dimensjonsanalyse

For å få et uttrykk vi kan sammenligne med elektromagnetisk stråling, finner vi rette potens av c i (3.57) ved dimensjonsanalyse: Dimensjonen til G er $\frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$. Dimensjonen til ω er $\frac{1}{\text{s}}$. Dimensjonen til $T^{ij}(\vec{k}, \omega)$ er impulstetthetsstrøm integrert over rom og tid,

$$[T^{ij}(\vec{k}, \omega)] = \frac{\text{kg m m}}{\text{s m}^3 \text{s}} \text{s m}^3 = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}} \quad (3.59)$$

Dimensjonen til $\frac{dI}{d\Omega d\omega}$ er energi per frekvensenhet $\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}\text{s}$. Om vi definerer r som den potensen c skal opphøyes i, får vi

$$\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^r \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \left(\frac{1}{\text{s}}\right)^2 \left(\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}\right)^2 = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}\text{s} \quad (3.60)$$

Opptelling gir

$$r = -5 \quad (3.61)$$

Altså skriver vi (3.57) når $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$:

$$\frac{dI}{d\Omega d\omega} = \frac{4\pi G\omega^2}{c^5}\Lambda_{ij\ lm}(\hat{k})T^{ij*}(\vec{k}, \omega)T^{lm}(\vec{k}, \omega) \quad (3.62)$$

der $\Lambda_{ij\ lm}$ er gitt ved (3.58). Dette er emittert gravitasjonsenergi per romvinkel og frekvensenhet fra en masse og energifordeling representert ved energi-impulstesoren $T^{ij}(\vec{x}, t)$. Det svarer til (2.79).

Kapittel 4

Ladning i sirkulær bevegelse

Vi har utledet uttrykk for utstrålt energi i form av gravitasjonsstråling og i form av elektromagnetisk stråling, som funksjon av den Fouriertransformerte henholdsvis elektriske strømmen og energi-impulstesoren. For å komme videre må vi derfor spesifisere disse nærmere. Vi velger å se på en ladet partikkel i konstant sirkelbevegelse, av hovedsaklig tre grunner:

- En konstant sirkelbevegelse er matematisk enkel, slik at vi har god mulighet til å finne de Fouriertransformerte størrelsene.
- I en synkrotron følger partiklene en tilnærmet sirkelbane, så eksemplet vårt blir realistisk.
- Det er vanskelig å akselerere annet enn ladete partikler til kontrollerte relativistiske hastigheter.

Vi ser altså på en partikkel med ladning e i sirkulær bevegelse med konstant hastighet v_0 . Posisjonsvektoren kan skrives som

$$\vec{x}_0(t) = r_0 \cos(\omega_0 t) \hat{x} + r_0 \sin(\omega_0 t) \hat{y} \quad (4.1)$$

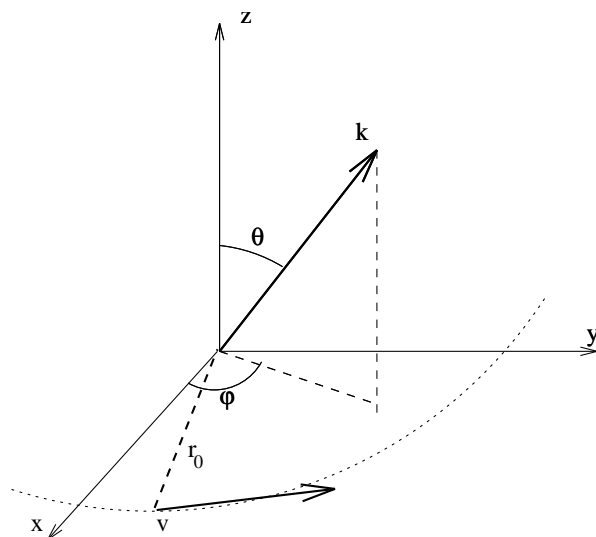
Her er r_0 den konstante radien i sirkulærbevegelsen og ω_0 den konstante vinkel-frekvensen. Koordinatsystemet er vist i Figur 4.1. Ved å derivere finner vi hastigheten:

$$\vec{v}_0(t) = -\omega_0 r_0 \sin(\omega_0 t) \hat{x} + \omega_0 r_0 \cos(\omega_0 t) \hat{y} \quad (4.2)$$

Her er $\omega_0 r_0$ den konstante hastigheten.

Vi skriver den elektriske strømmen denne partikkelen lager som (jfr. ligning (2.21))

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = e \vec{v}(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_0(t)) \quad (4.3)$$



Figur 4.1: Elektron i sirkelbane med radius r_0 og hastighet v_0 som sender ut stråling med bølgevektor \vec{k} .

Energi-impulstensoren finner vi fra ligning (3.6),

$$T^{\alpha\beta}(\vec{x}, t) = p^\alpha \frac{dx^\beta}{dt} \delta(\vec{x} - \vec{x}_0(t)) \quad (4.4)$$

der fireimpulsen er som før

$$p^\alpha = m\gamma[c, \vec{v}] \quad (4.5)$$

Vi skal nå hver for seg beregne ustrålt elektromagnetisk energi og ustrålt gravitasjonsenergi.

4.1 Ustrålt energi i form av elektromagnetisk stråling

Når vi skal beregne elektromagnetisk effekt, kunne vi tatt utgangspunkt i uttrykkene for total og vinkelavhengig utstrålt effekt vi utledet i avsnitt (2.5). Men for at fremgangsmåten skal samsvare med den for gravitasjonsstråling, og for at vi skal få frem frekvensavhengigheten, går vi den tunge vei om Fouriertransformering av den elektriske strømmen.

4.1.1 Fourieromvending av den elektriske strømmen

Skal vi bruke ligning (2.79) for å beregne utstrålt energi, trenger vi å finne den Fourieromvendte av strømmen, definert som

$$\vec{j}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^4}} \int d^3\vec{x} \int dt \vec{j}(\vec{x}, t) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad (4.6)$$

Integralet går over alle rom-tid koordinater. Setter vi inn (4.3) og integrerer over hele rommet får vi

$$\vec{j}(\vec{k}, \omega) = \frac{e\omega_0 r_0}{\sqrt{2\pi^4}} \int dt [-\sin(\omega_0 t) \hat{x} + \cos(\omega_0 t) \hat{y}] e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}_0)} \quad (4.7)$$

Vi velger \vec{k} som vist i Figur 4.1, slik at

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{x}_0 &= k_x r_0 \cos(\omega_0 t) + k_y r_0 \sin(\omega_0 t) \\ &= |\vec{k}| r_0 \sin \theta \cos \phi \cos(\omega_0 t) + |\vec{k}| r_0 \sin \theta \sin \phi \sin(\omega_0 t) \\ &= |\vec{k}| r_0 \sin \theta \cos(\omega_0 t - \phi) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Innsatt i (4.7) fås

$$\vec{j}(\vec{k}, \omega) = \frac{e\omega_0 r_0}{\sqrt{2\pi^4}} \int dt [-\sin(\omega_0 t) \hat{x} + \cos(\omega_0 t) \hat{y}] e^{i(\omega t - |\vec{k}| r_0 \sin \theta \cos(\omega_0 t - \phi))} \quad (4.9)$$

Nå ser vi at vi kan være glad vi valgte en så enkel bane som en sirkelbane der partikkelen har konstant hastighet. For mer kompliserte baner vil det kunne bli vanskelig å Fouriertransformere den elektriske strømmen.

Vi vil nå vise at dette kan skrives som en sum av Besselfunksjoner. Vi setter

$$\xi = \omega_0 t - \phi \quad (4.10)$$

Da er $dt = \frac{1}{\omega_0} d\xi$ og $t = \frac{1}{\omega_0}(\xi + \phi)$, og \vec{j} kan uttrykkes som

$$\vec{j}(\vec{k}, \omega) = \frac{er_0}{\sqrt{2\pi^4}} \int d\xi [-\sin(\xi + \phi) \hat{x} + \cos(\xi + \phi) \hat{y}] e^{i\frac{\omega}{\omega_0}(\xi + \phi)} e^{-i|\vec{k}|r_0 \sin \theta \cos \xi} \quad (4.11)$$

I Appendix B.4 har vi vist at integralet bare er forskjellig fra 0 om $\omega = n\omega_0$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Stråling sendes derfor bare ut med frekvenser lik et helt tall n (harmonisk nummer), multiplisert med grunnfrekvensen ω_0 . Det kommer av den periodiske sirkelbevegelsen.

Via (2.77) har vi da at $|\vec{k}| = \frac{n\omega_0}{c}$, og det gir

$$\vec{j}(n, \phi, \theta) = \frac{er_0}{\sqrt{2\pi^4}} \int d\xi [-\sin(\xi + \phi) \hat{x} + \cos(\xi + \phi) \hat{y}] e^{in(\xi + \phi)} e^{-i\frac{n\omega_0}{c} r_0 \sin \theta \cos \xi} \quad (4.12)$$

Så bruker vi at $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$ og $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$:

$$\begin{aligned}
\vec{j}(n, \phi, \theta) &= \hat{x} \frac{er_0}{\sqrt{2\pi^4}} \int d\xi \frac{1}{2i} (-e^{i(\xi+\phi)} + e^{-i(\xi+\phi)}) e^{in(\xi+\phi)} e^{-i\frac{n\omega_0}{c}r_0 \sin \theta \cos \xi} \\
&\quad + \hat{y} \frac{er_0}{\sqrt{2\pi^4}} \int d\xi \frac{1}{2} (e^{i(\xi+\phi)} + e^{-i(\xi+\phi)}) e^{in(\xi+\phi)} e^{-i\frac{n\omega_0}{c}r_0 \sin \theta \cos \xi} \\
&= \hat{x} \frac{er_0}{\sqrt{2\pi^4}} \int d\xi \frac{1}{2i} (-e^{i\xi} e^{i\phi} + e^{-i\xi} e^{-i\phi}) e^{in\xi} e^{in\phi} e^{-i\frac{n\omega_0}{c}r_0 \sin \theta \cos \xi} \\
&\quad + \hat{y} \frac{er_0}{\sqrt{2\pi^4}} \int d\xi \frac{1}{2} (e^{i\xi} e^{i\phi} + e^{-i\xi} e^{-i\phi}) e^{in\xi} e^{in\phi} e^{-i\frac{n\omega_0}{c}r_0 \sin \theta \cos \xi} \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Siden integranden opplagt er periodisk med hensyn på ξ , med er det nok å integrere fra $-\pi$ til π og deretter multiplisere med antall perioder N , der $N \rightarrow \infty$. For *ett* omløp har vi:

$$\begin{aligned}
\vec{j}(n, \phi, \theta) &= \hat{x} \frac{er_0}{\sqrt{2\pi^4}} \int_{-\pi}^{\pi} d\xi \frac{1}{2i} (-e^{i\xi} e^{i\phi} + e^{-i\xi} e^{-i\phi}) e^{in\xi} e^{in\phi} e^{-i\frac{n\omega_0}{c}r_0 \sin \theta \cos \xi} \\
&\quad + \hat{y} \frac{er_0}{\sqrt{2\pi^4}} \int_{-\pi}^{\pi} d\xi \frac{1}{2} (e^{i\xi} e^{i\phi} + e^{-i\xi} e^{-i\phi}) e^{in\xi} e^{in\phi} e^{-i\frac{n\omega_0}{c}r_0 \sin \theta \cos \xi} \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Vi innfører Besselfunksjonen av orden n , slik den er gitt i [2] ligning (9.1.21):

$$J_n(z) = \frac{i^{-n}}{\pi} \int_0^{\pi} e^{iz \cos \zeta} \cos(n\zeta) d\zeta \quad (4.15)$$

Siden $\cos \zeta$ og $e^{iz \cos \zeta}$ er symmetrisk om $\zeta = 0$, har vi:

$$J_n(z) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \cos \zeta} \cos(n\zeta) d\zeta \quad (4.16)$$

Siden $\sin \zeta$ er antisymmetrisk og $e^{iz \cos \zeta}$ er symmetrisk om $\zeta = 0$, har vi videre:

$$J_n(z) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \cos \zeta} (\cos(n\zeta) + i \sin(n\zeta)) d\zeta \quad (4.17)$$

Dermed har vi funnet den form av Besselfunksjonen vi skal bruke:

$$J_n(z) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \cos \zeta} e^{in\zeta} d\zeta \quad (4.18)$$

Da kan vi uttrykke $\vec{j}(n, \phi, \theta)$ per omløp som

$$\vec{j}(n, \phi, \theta) = -\hat{x} \frac{er_0}{2\pi} \frac{1}{2i} i^{n+1} e^{i(n+1)\phi} J_{n+1}\left(-\frac{n\omega_0}{c}r_0 \sin \theta\right)$$

$$\begin{aligned}
& + \hat{x} \frac{er_0}{2\pi} \frac{1}{2i} i^{n-1} e^{i(n-1)\phi} J_{n-1} \left(-\frac{n\omega_0}{c} r_0 \sin \theta \right) \\
& + \hat{y} \frac{er_0}{2\pi} \frac{1}{2} i^{n+1} e^{i(n+1)\phi} J_{n+1} \left(-\frac{n\omega_0}{c} r_0 \sin \theta \right) \\
& + \hat{y} \frac{er_0}{2\pi} \frac{1}{2} i^{n-1} e^{i(n-1)\phi} J_{n-1} \left(-\frac{n\omega_0}{c} r_0 \sin \theta \right) \tag{4.19}
\end{aligned}$$

Dette er den Fourieromvendte elektriske strømmen. Vi kan legge merke til at vi fremdeles har symmetri i ombytte av x og y (bortsett i fra komplekse faktorer), som vi skulle forvente ut ifra forutsetningene om en konstant sirkelbane i x - y -planet.

4.1.2 Utstrålt energi per romvinkelenhet ved gitt frekvens

Vi har tidligere funnet i ligning (2.79) utstrålt energi per frekvens og romvinkelenhet som funksjon av den Fourieromvendte strømmen:

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi c} \left| \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{j}(\vec{k}, \omega)) \right|^2 \tag{4.20}$$

Vi vil nå sette inn (4.19) i dette uttrykket. Vi husker at $\vec{j}(\vec{k}, \omega)$ er null hvis ikke $\omega = n\omega_0$ der $n = 1, 2, 3, \dots$ Vi bruker koordinater som vist i Figur 4.1.

Fra (2.77) har vi at $\vec{n} \parallel \vec{k}$. Ved hjelp av ϵ -tensoren definert i Appendix A har vi:

$$\begin{aligned}
(\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{j}))_i &= \epsilon_{ijk} n_j \epsilon_{klm} n_l j_m = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) n_j n_l j_m \\
&= n_j n_i j_j - n_j n_j j_i = (\vec{n} \cdot \vec{j}) n_i - j_i \tag{4.21}
\end{aligned}$$

Her har vi brukt (A.3). Dermed kan vi finne

$$\begin{aligned}
|\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{j})|^2 &= \\
& [((n_x j_x + n_y j_y) n_x - j_x)^2 + ((n_x j_x + n_y j_y) n_y - j_y)^2 + ((n_x j_x + n_y j_y) n_z - j_z)^2] \tag{4.22}
\end{aligned}$$

Etter litt regning finner vi:

$$\left| \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{j}(\vec{k}, \omega)) \right|^2 = |\vec{j}(n, \phi, \theta)|^2 - |\vec{n} \cdot \vec{j}(n, \phi, \theta)|^2 \tag{4.23}$$

Vi må altså til å beregne absoluttverdien av den Fourieromvendte strømmen:

$$\begin{aligned}
|\vec{j}(n, \phi, \theta)|^2 &= \vec{j}^*(n, \phi, \theta) \cdot \vec{j}(n, \phi, \theta) \\
&= \left(\frac{er_0}{4\pi} \right)^2 i^{n+1} (-i)^{n+1} e^{i(n+1)\phi} e^{-i(n+1)\phi} J_{n+1}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{er_0}{4\pi}\right)^2 i^{n-2}(-i)^{n-2} e^{i(n-1)\phi} e^{-i(n-1)\phi} J_{n-1}^2 \\
& - \left(\frac{er_0}{4\pi}\right)^2 i^n(-i)^{n-2} e^{i(n+1)\phi} e^{-i(n-1)\phi} J_{n+1} J_{n-1} \\
& - \left(\frac{er_0}{4\pi}\right)^2 (-i)^n i^{n-2} e^{-i(n+1)\phi} e^{i(n-1)\phi} J_{n+1} J_{n-1} \\
& + \left(\frac{er_0}{4\pi}\right)^2 i^{n+1}(-i)^{n+1} e^{i(n+1)\phi} e^{-i(n+1)\phi} J_{n+1}^2 \\
& + \left(\frac{er_0}{4\pi}\right)^2 i^{n-1}(-i)^{n-1} e^{i(n-1)\phi} e^{-i(n-1)\phi} J_{n-1}^2 \\
& + \left(\frac{er_0}{4\pi}\right)^2 i^{n+1}(-i)^{n-1} e^{i(n+1)\phi} e^{-i(n-1)\phi} J_{n-1} J_{n+1} \\
& + \left(\frac{er_0}{4\pi}\right)^2 i^{n-1}(-i)^{n+1} e^{i(n-1)\phi} e^{-i(n+1)\phi} J_{n-1} J_{n+1}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Da $i^n(-i)^n = 1$ og $e^{i\phi}e^{-i\phi} = 1$ får vi

$$|\vec{j}(n, \phi, \theta)|^2 = 2 \left(\frac{er_0}{4\pi}\right)^2 \left(J_{n+1}^2 \left(-n \frac{\omega_0 r_0}{c} \sin \theta\right) + J_{n-1}^2 \left(-n \frac{\omega_0 r_0}{c} \sin \theta\right) \right) \tag{4.25}$$

På samme måte kan vi beregne $|\vec{n} \cdot \vec{j}|^2$:

$$|\vec{n} \cdot \vec{j}|^2 = (n_x j_x + n_y j_y)(n_x j_x + n_y j_y)^* \tag{4.26}$$

Etter litt regning får vi

$$|\vec{n} \cdot \vec{j}|^2 = \left(\frac{er_0}{4\pi}\right)^2 \sin^2 \theta \left[J_{n+1}^2 \left(-n \frac{\omega_0 r_0}{c} \sin \theta\right) + J_{n-1}^2 \left(-n \frac{\omega_0 r_0}{c} \sin \theta\right) \right] \tag{4.27}$$

Fra (4.2) har vi

$$v_0 \equiv |\vec{v}_0| = \omega_0 r_0 (\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t) = \omega_0 r_0 \tag{4.28}$$

Setter vi inn (4.25), (4.27) og (4.28) i (4.20) får vi

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} &= \mu_0 c \pi n^2 \beta^2 \left(\frac{e}{4\pi}\right)^2 \left(2[J_{n+1}^2(n\beta \sin \theta) + J_{n-1}^2(n\beta \sin \theta)] \right. \\
&\quad \left. - \sin^2 \theta [J_{n+1}(n\beta \sin \theta) + J_{n-1}(n\beta \sin \theta)]^2 \right)
\end{aligned} \tag{4.29}$$

der $\beta = v_0/c$. Her har vi brukt at $J_n(-z) = (-1)^n J_n(z)$. Dette er den utstrålte energi per omløp i en gitt romvinkel ved en gitt frekvens $n\omega_0$, fra et elektron i en sirkulær bane med radius r_0 og konstant hastighet v_0 . Ved andre frekvenser enn $n\omega_0$ har vi for den periodiske sirkelbevegelsen ikke noe strålingsenergi.

4.1.3 Utstrålt energi ved ekstremt relativistiske hastigheter

Vi kan omskrive ligning (4.29) til

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \mu_0 c \pi n^2 \beta^2 \left(\frac{e}{4\pi} \right)^2 \left((J_{n+1} + J_{n-1})^2 + (J_{n+1} - J_{n-1})^2 - \sin^2 \theta [J_{n+1} + J_{n-1}]^2 \right) \quad (4.30)$$

Ved hjelp av relasjonene fra [1], ligningene (4.5.22) og (4.5.23),

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) \quad (4.31)$$

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2 \frac{d}{dx} J_n(x) \quad (4.32)$$

kan (4.30) skrives¹:

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \mu_0 c \pi n^2 \beta^2 \left(\frac{e}{4\pi} \right)^2 \left(\cos^2 \theta \left(\frac{2n}{n\beta \sin \theta} J_n \right)^2 + \left(2 \frac{dJ_n(n\beta \sin \theta)}{d(n\beta \sin \theta)} \right)^2 \right) \quad (4.33)$$

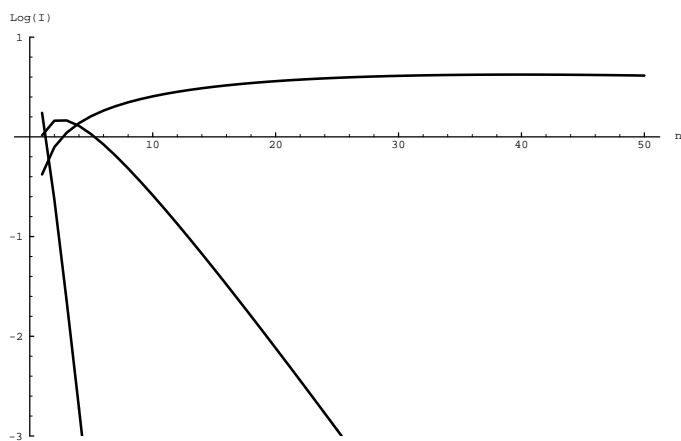
Vi skal nå se på det ekstremt relativistiske tilfellet, $\beta \rightarrow 1$. I Figur 4.2 har vi plottet logaritmisk utstrålt effekt i tre forskjellige romvinkelretninger som funksjon av n ved $\beta = 0.95$. Vi ser at utstråling i $x - y$ planet (baneplanet) dominerer kraftig over andre retninger ved $n > 10$. Kun ved frekvenser med $n = 1, 2$ er energiutstrålingen normalt planet av størrelsesorden energiutstrålingen i $x - y$ planet. Denne tendensen forsterkes ytterligere når β nærmer seg 1. Merk at dette stemmer utmerket overens med det vi fant ut i Kapittel 2.5.2.

I Figur 4.3 har vi plottet² utstrålt energi i $\theta = \frac{\pi}{2}$ retningen (baneplanet) som funksjon av n , for fem forskjellige β : $\beta = (0.50, 0.90, 0.95, 0.98, 0.99)$. Det er verdt å merke seg fire forskjellige tendenser:

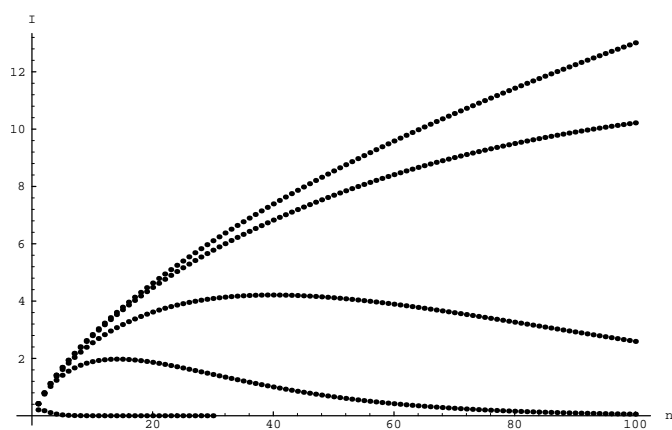
- Den totale energiutstrålingen blir mye større ved økende β .
- For en gitt β vil en ha en n_{\max} der energiutstrålingen er maksimal.
- Når $\beta \rightarrow 1$ vil n_{\max} øke kraftig.
- Når $\beta \rightarrow 1$ vil mesteparten av utstrålt energi ha frekvenser med store n -verdier.

¹Streng tatt gjelder dette bare for $n\beta \sin \theta \neq 0$. Det er i midlertid ikke noe stort problem, idet vi så i (2.5) at en relativistisk ladd partikkel stort sett stråler ut i baneplanet ($\theta = \frac{\pi}{2}$).

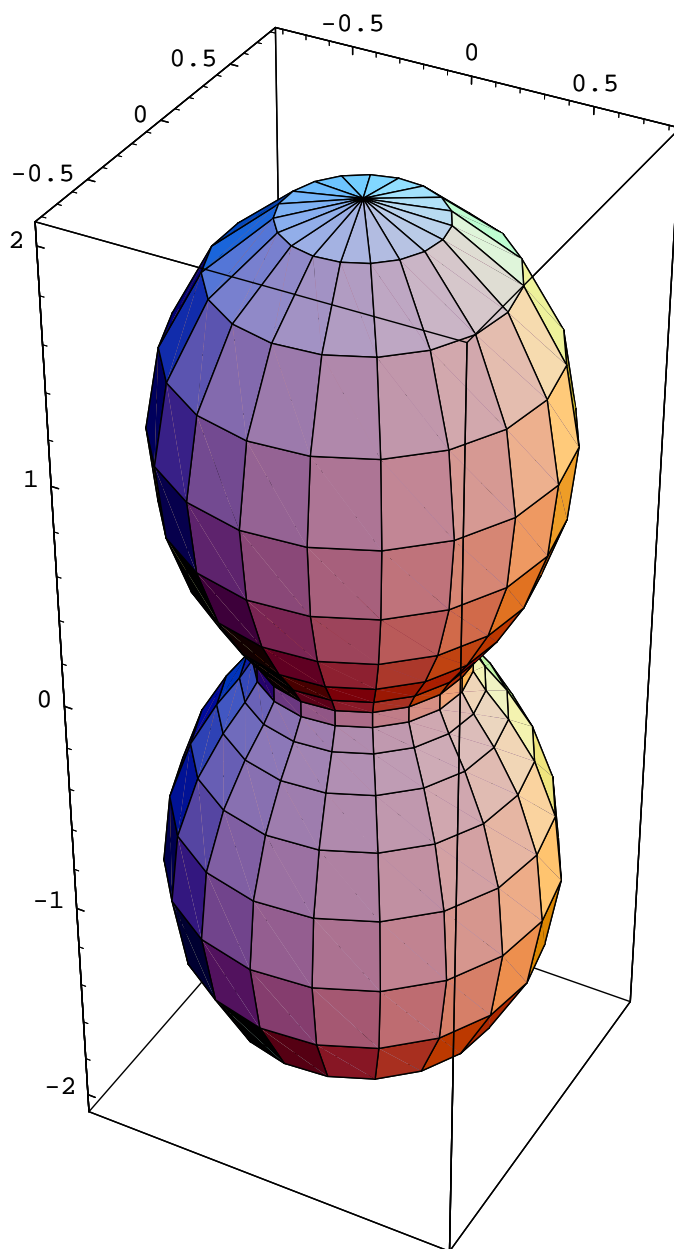
²Vi har nøyd oss med å se på små n , fordi å plote Besselfunksjonen er tidkrevende. Figuren illustrer likevel en tendens.



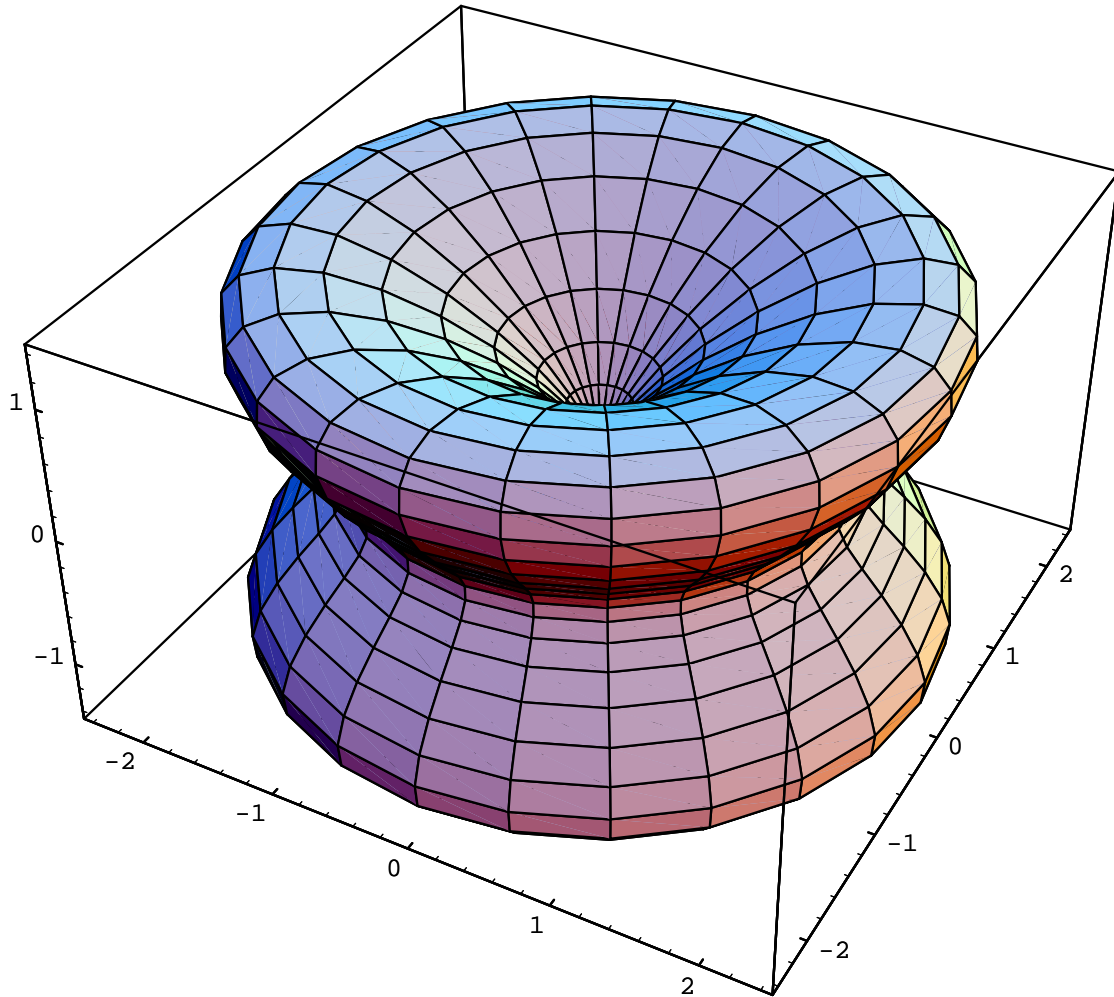
Figur 4.2: Logaritmisk utstrålt energi per omløp som funksjon av n ved $\beta = 0.95$ i retning $\theta = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{16})$. Heltrukken linje er brukt for klarhets skyld, mens verdiene bare er gyldig for n heltallig.



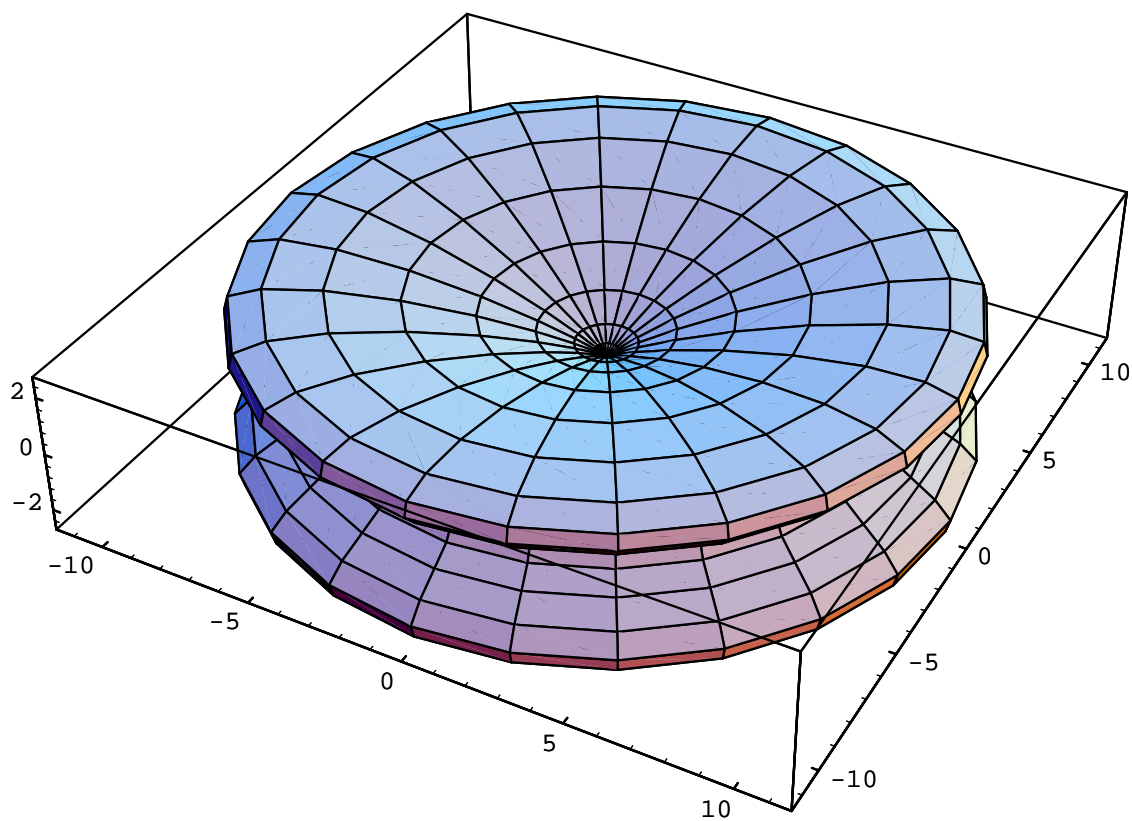
Figur 4.3: Utstrålt elektromagnetisk energi per omløp i x - y planet som funksjon av n ved $\beta = (0.50, 0.90, 0.95, 0.98, 0.99)$.



Figur 4.4: Utstrålt energi per omløp som funksjon av romvinkelretning med $n = 1$ og $\beta = 0.999$, i enheter av $\mu_0 c \pi \left(\frac{e}{4\pi}\right)^2$.



Figur 4.5: Utstrålt energi per omløp som funksjon av romvinkelretning med $n = 5$ og $\beta = 0.999$, i enheter av $\mu_0 c \pi \left(\frac{e}{4\pi}\right)^2$.



Figur 4.6: Utstrålt energi per omløp som funksjon av romvinkelretning med $n = 50$ og $\beta = 0.999$, i enheter av $\mu_0 c \pi \left(\frac{e}{4\pi}\right)^2$.

I Figur 4.4, Figur 4.5 og Figur 4.6 har vi vist eksempler på romvinkelfordelingen på utstrålt energi for henholdsvis $n = 1$, $n = 5$ og $n = 50$ med $\beta = 0.999$. Vi ser også ut av disse at utstrålingen konsentres i romvinkelretninger nær baneplanet. Om vi sammenligner med Figur 4.3 ser vi at det meste av energien ved $\beta = 0.999$ stråles ut over $n = 50$.

Konklusjonen blir at i grensen $\beta \rightarrow 1$ vil det stråles ut på et stort antall overharmoniske i et lite vinkelområde om $\theta = \frac{\pi}{2}$. Dermed kan vi rekkeutvikle β og θ :

$$\beta = \sqrt{1 - \gamma^{-2}} \simeq 1 - \frac{1}{2}\gamma^{-2} \quad (4.34)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \vartheta \Rightarrow \sin \theta = \cos \vartheta \simeq 1 - \frac{1}{2}\vartheta^2 \quad (4.35)$$

og

$$\beta \sin \theta \simeq 1 - \frac{1}{2}(\gamma^{-2} + \vartheta^2) \quad (4.36)$$

Disse relasjonene buker vi så for å approksimere Besselfunksjonen J_n og dens deriverte for store n og små $\beta \sin \theta$. Fra [2], ligningene (9.3.23) og (9.3.27), har vi nemlig for dette tilfellet:

$$J_n(n\beta \sin \theta) \simeq J_n\left(n - \frac{1}{2}n(\gamma^{-2} + \vartheta^2)\right) = J_n(n - sn^{\frac{1}{3}}) \sim \frac{2^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{3}}}\text{Ai}(2^{\frac{1}{3}}s) \quad (4.37)$$

$$J'_n(n\beta \sin \theta) \simeq J'_n\left(n - \frac{1}{2}n(\gamma^{-2} + \vartheta^2)\right) = J'_n(n - sn^{\frac{1}{3}}) \sim -\frac{2^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}}\text{Ai}'(2^{\frac{1}{3}}s) \quad (4.38)$$

der

$$s = \frac{1}{2}(\gamma^{-2} + \vartheta^2)n^{\frac{2}{3}} \quad (4.39)$$

og $\text{Ai}(x)$ er *Airy-funksjonen*, definert blant annet i [2], ligning (10.4.1). Approksimasjonene (4.37) og (4.38) gjelder for store n og fiksert s . For en gitt γ vil en derfor også ha en øvre grense i n om approksimasjonene skal være gyldig. Vi vil i Kapittel 5.2 vise at kriteriet for at approksimasjonen skal være god er oppfylt.

For blant annet å kunne sammenligne med Jackson[3], ligning (14.80) og (14.83), bruker vi [2], ligning (10.4.14) og (10.4.16):

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{z}{3}} K_{\frac{1}{3}}(\xi) \quad (4.40)$$

$$-\text{Ai}'(z) = \frac{1}{\pi} \frac{z}{\sqrt{3}} K_{\frac{2}{3}}(\xi) \quad (4.41)$$

der (ved hjelp av (4.28)) har

$$\xi = \frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(\gamma^{-2} + \vartheta^2)^{\frac{3}{2}}n \simeq \frac{\omega_n r_0}{3c}(\gamma^{-2} + \vartheta^2)^{\frac{3}{2}} \quad (4.42)$$

K_ν er den modifiserte Besselfunksjonen slik den er definert i [5].

J_n og J'_n i ligning (4.33) kan nå erstattes av henholdsvis $K_{\frac{1}{3}}$ og $K_{\frac{2}{3}}$. Faktorene fremfor blir henholdsvis

$$K_{\frac{1}{3}} : \quad \frac{2^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{\pi} \frac{2^{\frac{1}{6}} s^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}\pi} \sqrt{\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2}} \quad (4.43)$$

$$K_{\frac{2}{3}} : \quad \frac{2^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{\pi} \frac{2^{\frac{1}{3}} s}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}\pi} \left(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2}\right) \quad (4.44)$$

Setter vi (4.40) og (4.41) inn i (4.33) får vi

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \mu_0 c \pi n^2 \beta^2 \left(\frac{e}{4\pi}\right)^2 \left(\vartheta^2 \left(\frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma^2}\right)} \frac{1}{\sqrt{3}\pi} \sqrt{\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2}} K_{\frac{1}{3}}(\xi) \right)^2 + \left(2 \frac{1}{\sqrt{3}\pi} \left(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2}\right) K_{\frac{2}{3}}(\xi) \right)^2 \right) \quad (4.45)$$

når vi bruker

$$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\cos(\vartheta + \frac{\pi}{2})}{\sin(\vartheta + \frac{\pi}{2})} = \frac{-\sin \vartheta}{\cos \vartheta} = -\tan \vartheta \simeq -\vartheta \quad (4.46)$$

Med litt rydding av faktorer kan (4.45) skrives

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{\mu_0 c e^2}{12\pi^3} \left(\frac{\omega_n r_o}{c}\right)^2 \left(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2}\right)^2 \left(\frac{\vartheta^2}{\left(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2}\right)} K_{\frac{1}{3}}(\xi)^2 + K_{\frac{2}{3}}(\xi)^2 \right) \quad (4.47)$$

Dette uttrykket er det SI-ekvivalente til (14.83) i Jackson[3] med den forskjell at det her kun gjelder for frekvenser $\omega = \omega_n$. Det gir emittert energi per frekvens og romvinkelenhet for en partikkel med ladning e i sirkelbane med konstant hastighet.

4.1.4 Gjennomsnittlig utstrålt effekt per frekvens og romvinkelenhet

Gjennomsnittlig utstrålt effekt i romvinklelementet $d\Omega$ fås ved å dele (4.47) på omløpstiden

$$t_0 = \frac{2\pi r_0}{\omega_0 r_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (4.48)$$

Ligningene (4.29) og (4.47) gir energi per *frekvensenhet*. For å få utstrålt effekt ved *n'te overharmoniske frekvens* må vi multiplisere med avstanden mellom frekvens n og $n + 1$: ω_0 . Det gir for (4.29)

$$\begin{aligned} \frac{dP_n}{d\Omega} = \frac{\mu_0 c e^2 n^2 \beta^2 \omega_0^2}{32\pi^2} & \left(2[J_{n+1}^2(n\beta \sin \theta) + J_{n-1}^2(n\beta \sin \theta)] \right. \\ & \left. - \sin^2 \theta [J_{n+1}(n\beta \sin \theta) + J_{n-1}(n\beta \sin \theta)]^2 \right) \end{aligned} \quad (4.49)$$

I den ekstremt relativistiske grensen blir

$$\frac{dP_n}{d\Omega} = \frac{\mu_0 c n^2 \omega_0^4 r_0^2 e^2}{c^2 24\pi^4} \left(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right)^2 \left(\frac{\vartheta^2}{(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2})} K_{\frac{1}{3}}(\xi)^2 + K_{\frac{2}{3}}(\xi)^2 \right) \quad (4.50)$$

Dette er utstrålt effekt med frekvens w_n inn i romvinklelementet $d\Omega$ Vi kan sette inn $\omega_0 r_0 \simeq c$ og får da

$$\frac{dP_n}{d\Omega} = \frac{\mu_0 c \omega_n^2 e^2}{24\pi^4} \left(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right)^2 \left(\frac{\vartheta^2}{(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2})} K_{\frac{1}{3}}(\xi)^2 + K_{\frac{2}{3}}(\xi)^2 \right) \quad (4.51)$$

Dette er den SI-ekvivalente til ligning (14.96) i Jackson[3].

4.1.5 Effekt i en romvinkelretning

Vi kan finne et tilnærmet uttrykk for totalt utstrålt effekt i en romvinkelretning i det ekstremt relativistiske tilfellet. Under visse forutsetninger³ gjelder nemlig

$$\frac{dP}{d\Omega} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dP_n}{d\Omega} \simeq \frac{1}{\omega_0} \int_0^{\infty} \frac{dP}{d\omega d\Omega} d\omega \quad (4.52)$$

der vi har

$$\frac{dP}{d\omega d\Omega} = \frac{\mu_0 c \omega^2 e^2}{24\pi^4} \left(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right)^2 \left(\frac{\vartheta^2}{(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2})} K_{\frac{1}{3}}(\xi)^2 + K_{\frac{2}{3}}(\xi)^2 \right) \quad (4.53)$$

I Appendix B.3.1 har vi regnet ut (4.52) og funnet total utstrålt effekt i en romvinkelretning

$$\frac{dP}{d\Omega} = 0.386 \cdot \frac{\mu_0 c^3 e^2}{\pi^4 r_0^2} \frac{1}{(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2})^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\vartheta^2}{(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2})} + 1.40 \right) \quad (4.54)$$

Dette uttrykket er analogt til ligning (14.48) i Jackson[3]. Vi ser at det har samme form som ligning (2.58), som jo gjelder for både ikke-relativistiske og relativistiske hastigheter.

³Gjelder eksakt i grensen $\omega_0 \rightarrow 0$, men gir en tilnærming når ω_0 er 'liten' eller $\frac{dP}{d\omega d\Omega}$ er tilnærmet konstant over intervallet $[n, n + 1]\omega_0$.

4.1.6 Totalt utstrålt effekt

Vi kan finne totalt utstrålt effekt i de ekstremt relativistiske tilfellet, ved å integrere (4.54) over alle romvinkler:

$$P = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{dP}{d\Omega} \sin\theta d\theta d\phi = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dP}{d\Omega} \left(1 - \frac{1}{2}\vartheta^2\right) d\vartheta \quad (4.55)$$

I siste overgang har vi brukt (4.35), og at $\frac{dP}{d\Omega}$ er symmetrisk om $\vartheta = 0$. Setter vi inn (4.54) og integrerer, får vi

$$P = 4\pi \cdot 0.386 \cdot \frac{\mu_0 c^3 e^2}{\pi^4 r_0^2} \left[\sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + \vartheta^2} \left(-\frac{\left(\frac{1}{\gamma^2} + 2\right)\vartheta}{10\left(\frac{1}{\gamma^2} + \vartheta^2\right)^3} + \frac{(16\gamma^2 + 13)\vartheta}{30\left(\frac{1}{\gamma^2} + \vartheta^2\right)^2} + \frac{\gamma^2(16\gamma^2 - 5)\vartheta}{15\left(\frac{1}{\gamma^2} + \vartheta^2\right)} \right) \right]_0^{\pi/2} \quad (4.56)$$

Til ledende orden blir

$$P = 1.64 \cdot \frac{\mu_0 c^3 e^2}{\pi^3 r_0^2} \gamma^4 \quad (4.57)$$

Dette er totalt utstrålt effekt fra en ladning i sirkelbevegelse med ekstremt relativistisk hastighet. Verdt å merke seg er at det stemmer utmerket overens med det tilsvarende uttrykket for utstrålt effekt fra en ladning som blir akselerert normalt på hastigheten, ligning (2.59). Det ser vi om vi setter inn for sirkelbevegelse:

$$|\dot{\vec{v}}| = \frac{v_0^2}{r_0} = \omega_0^2 r_0 = \frac{c}{r_0} \quad (4.58)$$

slik at (2.59) gir

$$P(\tau) = \frac{1}{6\pi} \frac{e^2 |\dot{\vec{v}}|^2}{\epsilon_0 c^3} \gamma^4 = \frac{1}{6\pi} \frac{\mu_0 c^3 e^2}{r_0^2} \gamma^4 = 1.64 \cdot \frac{\mu_0 c^3 e^2}{\pi^3 r_0^2} \gamma^4 \quad (4.59)$$

Det er altså konsistens mellom de to forskjellige fremgangsmåtene. I tillegg ser vi at konstanten $\frac{\mu_0 c^3 e^2}{r_0^2}$ er med i begge uttrykk.

4.2 Utstrålt energi i form av gravitasjonsstråling

Vi skal her finne uttrykk for emittert gravitasjonsenergi som funksjon av frekvens og romvinkelretning, tilsvarende de vi fant for elektromagnetisk stråling i forrige avsnitt.

4.2.1 Fourieromvending av energi-impulstensoren

Vi går frem på tilsvarende måte som vi gjorde for elektromagnetisk stråling. Fra ligning (3.62) vet vi at for å beregne utstrålt gravitasjonsenergi trenger vi å finne den Fourieromvendte av energi-impulstensoren, som kan defineres som

$$T^{\mu\nu}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^4}} \int d^3\vec{x} \int dt T^{\mu\nu}(\vec{x}, t) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad (4.60)$$

Vi trenger bare romkomponentene av denne. Energi-impulstensoren $T^{\mu\nu}(\vec{x}, t)$ er definert i (4.4), så innsatt og integrert over hele rommet får vi

$$T^{11}(\vec{k}, \omega) = \frac{m\gamma}{\sqrt{2\pi^4}} \int dt v^1 v^1 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}_0)} \quad (4.61)$$

$$T^{22}(\vec{k}, \omega) = \frac{m\gamma}{\sqrt{2\pi^4}} \int dt v^2 v^2 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}_0)} \quad (4.62)$$

$$T^{21}(\vec{k}, \omega) = T^{12}(\vec{k}, \omega) = \frac{m\gamma}{\sqrt{2\pi^4}} \int dt v^1 v^2 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}_0)} \quad (4.63)$$

$$T^{\alpha 3} = T^{3\alpha} = 0 \quad (4.64)$$

Her svarer indeks 1 til x -komponenten, indeks 2 til y -komponenten og indeks 3 til z -komponenten. $T^{\alpha 3} = 0$ fordi $v^3 = 0$. Setter vi inn hastigheten fra (4.2), og bruker (4.8), får vi:

$$T^{11}(\vec{k}, \omega) = \frac{m\gamma\omega_0^2 r_0^2}{\sqrt{2\pi^4}} \int dt \sin^2 \omega_0 t e^{i(\omega t - |\vec{k}|r_0 \sin \theta \cos(\omega_0 t - \phi))} \quad (4.65)$$

$$T^{22}(\vec{k}, \omega) = \frac{m\gamma\omega_0^2 r_0^2}{\sqrt{2\pi^4}} \int dt \cos^2 \omega_0 t e^{i(\omega t - |\vec{k}|r_0 \sin \theta \cos(\omega_0 t - \phi))} \quad (4.66)$$

$$T^{12}(\vec{k}, \omega) = -\frac{m\gamma\omega_0^2 r_0^2}{\sqrt{2\pi^4}} \int dt \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t e^{i(\omega t - |\vec{k}|r_0 \sin \theta \cos(\omega_0 t - \phi))} \quad (4.67)$$

På samme måte som for $\vec{j}(\vec{k}, \omega)$ setter vi

$$\xi = \omega_0 t - \phi \quad (4.68)$$

slik at vi får

$$T^{11}(\vec{k}, \omega) = \frac{m\gamma\omega_0 r_0^2}{\sqrt{2\pi^4}} \int d\xi \sin^2(\xi + \phi) e^{in(\xi+\phi)} e^{-i\frac{n\omega_0}{c} r_0 \sin\theta \cos\xi} \quad (4.69)$$

$$T^{22}(\vec{k}, \omega) = \frac{m\gamma\omega_0 r_0^2}{\sqrt{2\pi^4}} \int d\xi \cos^2(\xi + \phi) e^{in(\xi+\phi)} e^{-i\frac{n\omega_0}{c} r_0 \sin\theta \cos\xi} \quad (4.70)$$

$$T^{12}(\vec{k}, \omega) = -\frac{m\gamma\omega_0 r_0^2}{\sqrt{2\pi^4}} \int d\xi \sin(\xi + \phi) \cos(\xi + \phi) e^{in(\xi+\phi)} e^{-i\frac{n\omega_0}{c} r_0 \sin\theta \cos\xi} \quad (4.71)$$

Her har vi brukt (3.37), og at integralene er forskjellig fra 0 kun når $\omega = n\omega_0$ der $n = 1, 2, 3, \dots$ Sistnevnte punkt er vist i Appendiks B.4 for elektromagnetisk stråling, og integralene er slik at argumentet kan overføres direkte til å gjelde også gravitasjonsstråling.

Ved hjelp av kjente trigonometriske formler får vi

$$T^{11}(\vec{k}, \omega) = \frac{m\gamma\omega_0 r_0^2}{\sqrt{2\pi^4}} \int d\xi \frac{1}{2} (1 - \cos(2\xi + 2\phi)) e^{in(\xi+\phi)} e^{-i\frac{n\omega_0}{c} r_0 \sin\theta \cos\xi} \quad (4.72)$$

$$T^{22}(\vec{k}, \omega) = \frac{m\gamma\omega_0 r_0^2}{\sqrt{2\pi^4}} \int d\xi \frac{1}{2} (1 + \cos(2\xi + 2\phi)) e^{in(\xi+\phi)} e^{-i\frac{n\omega_0}{c} r_0 \sin\theta \cos\xi} \quad (4.73)$$

$$T^{12}(\vec{k}, \omega) = -\frac{m\gamma\omega_0 r_0^2}{\sqrt{2\pi^4}} \int d\xi \frac{1}{2} \sin(2\xi + 2\phi) e^{in(\xi+\phi)} e^{-i\frac{n\omega_0}{c} r_0 \sin\theta \cos\xi} \quad (4.74)$$

Så bruker vi at $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$ og $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ slik at

$$T^{11}(\vec{k}, \omega) = \frac{m\gamma\omega_0 r_0^2}{\sqrt{2\pi^4}} \int d\xi \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}(e^{i(2\xi+2\phi)} + e^{-i(2\xi+2\phi)})\right) e^{in(\xi+\phi)} e^{-i\frac{n\omega_0}{c} r_0 \sin\theta \cos\xi} \quad (4.75)$$

$$T^{22}(\vec{k}, \omega) = \frac{m\gamma\omega_0 r_0^2}{\sqrt{2\pi^4}} \int d\xi \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}(e^{i(2\xi+2\phi)} + e^{-i(2\xi+2\phi)})\right) e^{in(\xi+\phi)} e^{-i\frac{n\omega_0}{c} r_0 \sin\theta \cos\xi} \quad (4.76)$$

$$T^{12}(\vec{k}, \omega) = -\frac{m\gamma\omega_0 r_0^2}{\sqrt{2\pi^4}} \int d\xi \frac{1}{4i} (e^{i(2\xi+2\phi)} - e^{-i(2\xi+2\phi)}) e^{in(\xi+\phi)} e^{-i\frac{n\omega_0}{c} r_0 \sin\theta \cos\xi} \quad (4.77)$$

Siden integranden er periodisk med hensyn på, er det som for $\vec{j}(\vec{k}, \omega)$ nok å integrere over et omløp. Ved å innføre Besselfunksjonen (4.18) kan vi skrive $T^{\mu\nu}(\vec{k}, \vec{\omega})$ per omløp som:

$$T^{11}(\vec{k}, \omega) = \frac{m\gamma\omega_0 r_0^2}{2\pi} \frac{1}{2} [i^n e^{in\phi} J_n(-\frac{n\omega_0}{c} r_0 \sin\theta)]$$

$$-\frac{1}{2}i^{n+2}e^{i(n+2)\phi}J_{n+2}\left(-\frac{n\omega_0}{c}r_0\sin\theta\right) - \frac{1}{2}i^{n-2}e^{i(n-2)\phi}J_{n-2}\left(-\frac{n\omega_0}{c}r_0\sin\theta\right)] \quad (4.78)$$

$$T^{22}(\vec{k}, \omega) = \frac{m\gamma\omega_0 r_0^2}{2\pi} \frac{1}{2} \left[i^n e^{in\phi} J_n\left(-\frac{n\omega_0}{c}r_0\sin\theta\right) + \frac{1}{2}i^{n+2}e^{i(n+2)\phi}J_{n+2}\left(-\frac{n\omega_0}{c}r_0\sin\theta\right) + \frac{1}{2}i^{n-2}e^{i(n-2)\phi}J_{n-2}\left(-\frac{n\omega_0}{c}r_0\sin\theta\right) \right] \quad (4.79)$$

$$T^{12}(\vec{k}, \omega) = -\frac{m\gamma\omega_0 r_0^2}{2\pi} \frac{1}{4i} \left[i^{n+2}e^{i(n+2)\phi}J_{n+2}\left(-\frac{n\omega_0}{c}r_0\sin\theta\right) - i^{n-2}e^{i(n-2)\phi}J_{n-2}\left(-\frac{n\omega_0}{c}r_0\sin\theta\right) \right] \quad (4.80)$$

Dette er leddene i den Fourieromvendte energi-impulstensoren vi kommer til å trenge.

4.2.2 Utstrålt energi per romvinkelenhet ved gitt frekvens

Ligning (3.62) ga oss et uttrykk for utstrålt energi per romvinkelelement per frekvensenhet som funksjon av den Fourieromvendte energi-impulstensoren

$$\frac{dI}{d\Omega d\omega} = \frac{4\pi G\omega^2}{c^5} \Lambda_{ij\,lm}(\hat{k}) T^{ij*}(\vec{k}, \omega) T^{lm}(\vec{k}, \omega) \quad (4.81)$$

der

$$\Lambda_{ij\,lm}(\hat{k}) \equiv \delta_{il}\delta_{jm} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{lm} - 2\delta_{il}\hat{k}_j\hat{k}_m + \frac{1}{2}\delta_{lm}\hat{k}_i\hat{k}_j + \frac{1}{2}\delta_{ij}\hat{k}_l\hat{k}_m + \frac{1}{2}\hat{k}_i\hat{k}_j\hat{k}_l\hat{k}_m \quad (4.82)$$

Symmetrien om z -aksen i (4.1) gjør at energien utstrålt per omløp ut i romvinkel, (4.81), bare kan avhenge av θ og ikke av ϕ (jfr. Figur 4.1). Derfor nøyer vi oss i med å se på bølgevektorene gitt ved

$$\vec{k} = k_x\hat{x} + k_z\hat{z} = \frac{\omega}{c}(\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}) \quad (4.83)$$

Dette tilsvarer $\phi = 0$. Resultatet er at antall ledd i (4.81) reduseres drastisk. Setter vi inn i (4.81) får vi

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\Omega d\omega} &= \frac{4\pi G\omega^2}{c^5} \left(T^{*11}T^{11} + T^{*12}T^{12} + T^{*21}T^{21} + T^{*22}T^{22} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}[T^{*11}T^{11} + T^{*11}T^{22} + T^{*22}T^{11} + T^{*22}T^{22}] \right. \\ &\quad \left. - 2\sin^2\theta[T^{*11}T^{11} + T^{*21}T^{21}] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{1}{2}\sin^2\theta[T^{*11}T^{11}+T^{*11}T^{22}] \\
& +\frac{1}{2}\sin^2\theta[T^{*11}T^{11}+T^{*22}T^{11}] \\
& \quad +\frac{1}{2}\sin^4\theta T^{*11}T^{11}
\end{aligned} \tag{4.84}$$

Hver linje i (4.84) representerer et ledd i Λ . Her har vi brukt

$$\hat{k}_1\hat{k}_1 = \sin\theta\hat{k}\sin\theta\hat{k} = \sin^2\theta \tag{4.85}$$

Nå er det lett å gjøre regnefeil. For å redusere antallet regnefeil til et minimum, har vi sjekket svarene fra (4.87) til (4.97) ved å kjøre en prosedyre listet i Appendiks C, i dataprogrammet Mathematica. Vi presenterer likevel mellomregningen her.

Setter vi inn (4.78), (4.79) og (4.80), og forenkler ($\beta = \omega_0 r_0/c$), kommer vi frem til

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{d\Omega d\omega} &= \frac{m^2 G}{4\pi c} \frac{n^2 \beta^4}{(1-\beta^2)} \left(J_{n-2}^2 + J_{n+2}^2 - \sin^2\theta [J_{n-2}^2 + J_{n+2}^2 + J_{n-2}J_n + J_nJ_{n+2}] \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{8}\sin^4\theta [J_{n-2}^2 + 4J_n^2 + J_{n+2}^2 + 4J_{n-2}J_n + 4J_nJ_{n+2} + 2J_{n-2}J_{n+2}] \right) \tag{4.86}
\end{aligned}$$

Dette er emittert energi per romvinkel og frekvensenhet. Vi legger merke til likheten med det tilsvarende uttrykket for elektromagnetisk stråling, ligning (4.29). Den kanskje viktigste **forskjellen** når man tenker på totalt utstrålt effekt, er konstantene foran, der $(e/4\pi)^2 \rightarrow m^2/4$, $\mu_0 \rightarrow G$ og $c\pi \rightarrow (c\pi)^{-1}$. Et raskt overslag gir at forholdet mellom konstanten i gravitasjonsenergiuttrykket og i det elektromagnetiske uttrykket er $\sim 10^{-44}$! Vi kan imidlertid håpe på at i ekstremt relativistiske hastigheter vil γ^2 -faktoren i gravitasjonsenergien 'spise opp' litt av forspranget.

En annen forskjell er at energiuttrykket for gravitasjonsstråling inneholder en $\sin^4\theta$ del. Det kan ha sammenheng med kvadrupolnaturen til gravitasjonsstrålingen mot dipolnaturen til elektromagnetisk stråling.

Vi går fortsatt frem på samme måte som for elektromagnetisk stråling. For å få I som funksjon av J_n og J'_n skriver vi om til

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{d\Omega d\omega} &= \frac{m^2 G}{4\pi c} \frac{n^2 \beta^4}{(1-\beta^2)} \left(\frac{1}{2}(J_{n-2} + J_{n+2})^2 + \frac{1}{2}(J_{n-2} - J_{n+2})^2 \right. \\
& - \sin^2\theta \frac{1}{4} [(J_{n-2} + 2J_n + J_{n+2})^2 + 2(J_{n-2} - J_{n+2})^2 + (J_{n-2} + J_{n+2})^2 - 4J_n^2] \\
& \quad \left. + \frac{1}{8}\sin^4\theta [J_{n-2} + 2J_n + J_{n+2}]^2 \right) \tag{4.87}
\end{aligned}$$

Fra (4.31) og (4.32) finner vi

$$\begin{aligned}
J_{n-2} + J_{n+2} &= (J_{n-2} + J_n) + (J_n + J_{n+2}) - 2J_n \\
&= \frac{2(n-1)}{x} J_{n-1} + \frac{2(n+1)}{x} J_{n+1} - 2J_n \\
&= \left(\frac{2n}{x}\right)^2 J_n - \frac{4}{x} J'_n - 2J_n \\
&= \left(\left(\frac{2n}{x}\right)^2 - 2\right) J_n - \frac{4}{x} J'_n \tag{4.88}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{n-2} - J_{n+2} &= (J_{n-2} + J_n) - (J_n + J_{n+2}) \\
&= \frac{2(n-1)}{x} J_{n-1} - \frac{2(n+1)}{x} J_{n+1} \\
&= \frac{4n}{x} J'_n - \frac{4n}{x^2} J_n \tag{4.89}
\end{aligned}$$

$$J_{n-2} + 2J_n + J_{n+2} = \left(\frac{2n}{x}\right)^2 J_n - \frac{4}{x} J'_n \tag{4.90}$$

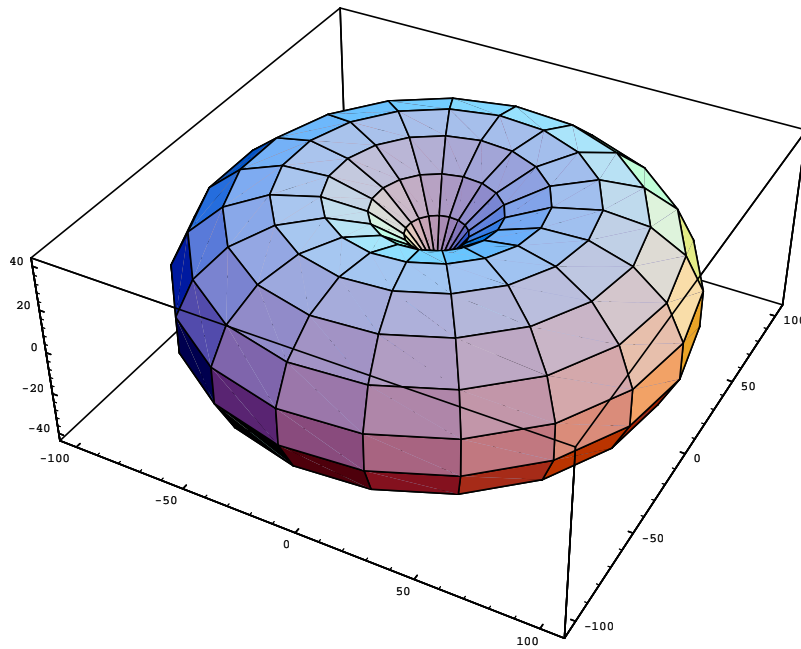
I siste overgang har vi benyttet (4.88). Nå setter vi (4.88), (4.89) og (4.90) inn i (4.87) og får (for $x \neq 0$)

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{d\Omega d\omega} &= \frac{m^2 G}{4\pi c} \frac{n^2 \beta^4}{(1-\beta^2)} \left[\frac{1}{2} \left[\left(\left(\frac{2n}{x}\right)^2 - 2 \right) J_n - \frac{4}{x} J'_n \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{4n}{x} J'_n - \frac{4n}{x^2} J_n \right]^2 \right. \\
&- \sin^2 \theta \frac{1}{4} \left[\left(\left(\frac{2n}{x}\right)^2 J_n - \frac{4}{x} J'_n \right)^2 + 2 \left(\frac{4n}{x} J'_n - \frac{4n}{x^2} J_n \right)^2 + \left(\left(\left(\frac{2n}{x}\right)^2 - 2 \right) J_n - \frac{4}{x} J'_n \right)^2 - 4J_n^2 \right] \\
&\left. + \frac{1}{8} \sin^4 \theta \left[\left(\frac{2n}{x} \right)^2 J_n - \frac{4}{x} J'_n \right]^2 \right] \tag{4.91}
\end{aligned}$$

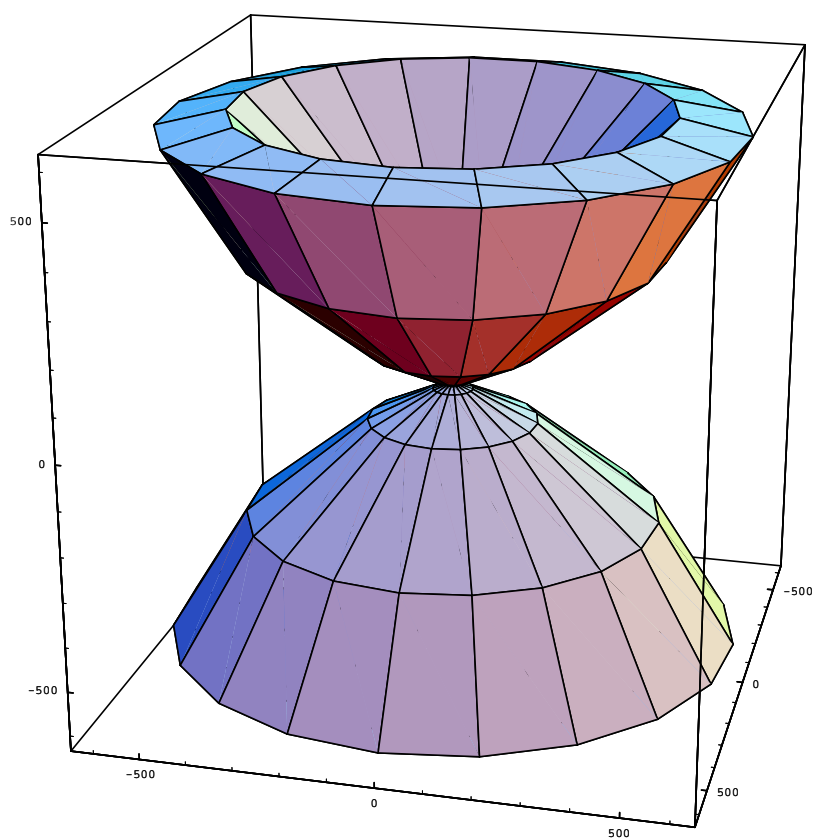
Her er $x = n\beta \sin \theta$. Litt regning gir så

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{d\Omega d\omega} &= \frac{m^2 G}{4\pi c} \frac{n^2 \beta^4}{(1-\beta^2)} \\
&\left[J_n^2 \left(2 + \frac{4n^2}{x^4} + \frac{19n^4}{4x^4} - \frac{6n^2}{x^2} + \frac{4n^2 \cos 2\theta}{x^4} + \frac{3n^4 \cos 2\theta}{x^4} - \frac{2n^2 \cos 2\theta}{x^2} + n^4 \cos 4\theta \text{ over } 4x^4 \right) \right. \\
&+ J_n J'_n \left(\frac{-35n^2}{2x^3} + \frac{6}{x} - \frac{14n^2 \cos 2\theta}{x^3} + \frac{2 \cos 2\theta}{x} - \frac{n^2 \cos 4\theta}{2x^3} \right) \\
&\left. + (J'_n)^2 \left(\frac{19}{4x^2} + \frac{4n^2}{x^2} + \frac{3 \cos 2\theta}{x^2} + \frac{4n^2 \cos 2\theta}{x^2} + \frac{\cos 4\theta}{4x^2} \right) \right] \tag{4.92}
\end{aligned}$$

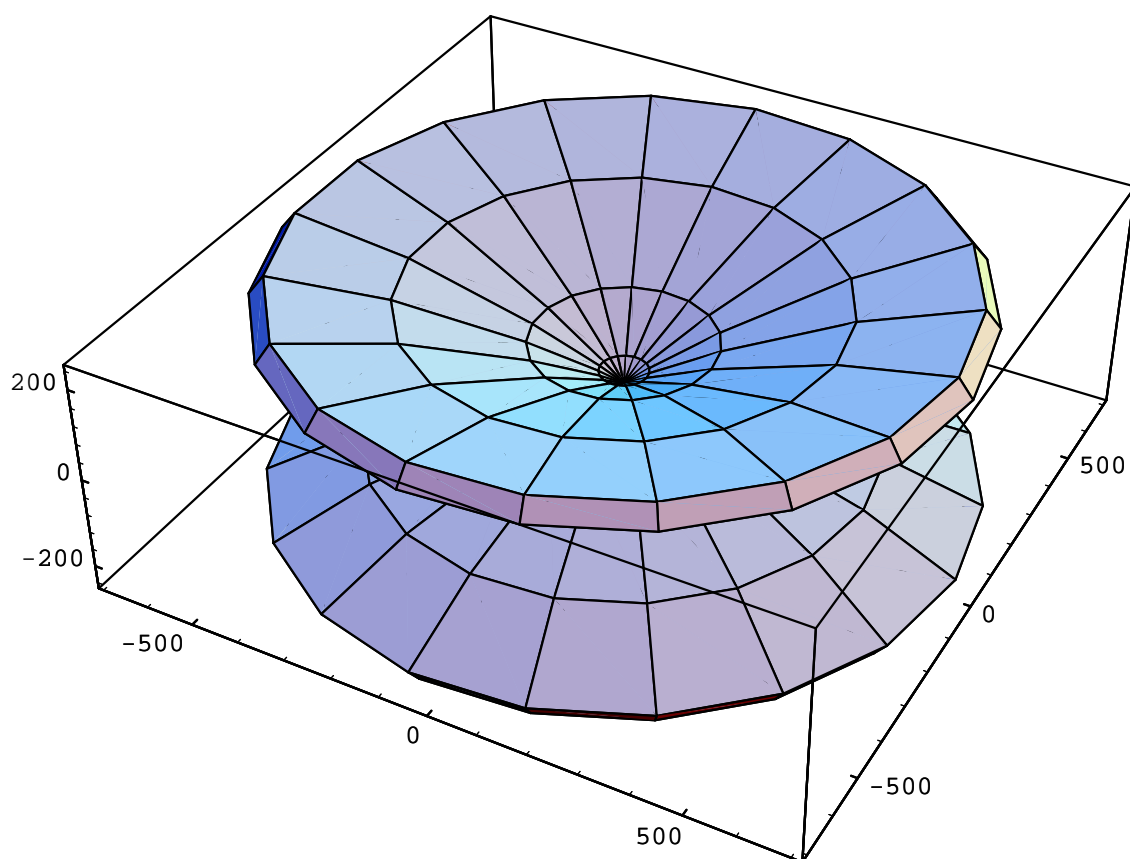
Dette er utstrålt energi per omløp per frekvensenhet inn i romvinklelementet $d\Omega$.



Figur 4.7: Utstrålt energi per omløp i retning $d\Omega$ med med frekvens $\omega = \omega_0$ og $\beta = 0.999$, i enheter av $\left(\frac{m^2 G}{4\pi c}\right)$.



Figur 4.8: Utstrålt energi per omløp i retning $d\Omega$ med med frekvens $\omega = 5\omega_0$ og $\beta = 0.999$, i enheter av $\left(\frac{m^2 G}{4\pi c}\right)$.



Figur 4.9: Utstrålt energi per omløp i retning $d\Omega$ med med frekvens $\omega = 50\omega_0$ og $\beta = 0.99$, i enheter av $\left(\frac{m^2 G}{4\pi c}\right)$.

4.2.3 Utstrålt energi ved ekstremt relativistiske hastigheter

På samme måte som for elektromagnetisk stråling ser vi spesielt på det ekstremt relativistiske tilfellet $\beta \rightarrow 1$. Det vil stråles ut ved store n i et lite vinkelområde om $\theta = \frac{\pi}{2}$. Dette kan vi argumentere for på akkurat samme måte som i det elektromagnetiske tilfellet. Det gjør vi i neste kapittel. For blant å kunne sammenligne med elektromagnetisk stråling, har vi også her vist utstrålingsmønstre. I Figur 4.7, Figur 4.8 og Figur 4.2.3 er vist emittert energi per omløp for et elektron med $\beta = 0.999$, som funksjon av romvinkelretning ved henholdsvis $n = 1$, $n = 5$ og $n = 50$. Tendensen er klar: Ved høyere harmoniske nummer n , vil en større og større andel av energien stråles ut i retninger nær baneplanet.

Vi bruker approksimasjonene (4.34) og (4.36), og

$$\cos 2\theta = \cos(2\vartheta + \pi) = -\cos 2\vartheta \simeq -(1 - 2\vartheta^2) \quad (4.93)$$

$$\cos 4\theta = \cos(4\vartheta + 2\pi) = \cos 4\vartheta \simeq (1 - 8\vartheta^2) \quad (4.94)$$

Når vi setter disse inn i (4.92) får vi

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\Omega d\omega} = & \frac{m^2 G}{4\pi c} \frac{n^2 \beta^4}{(1 - \beta^2)} \left[J_n^2 \left[2 + 4n^{-2} \left(1 + 2(\gamma^{-2} + \vartheta^2) \right) \right. \right. \\ & + \frac{19}{4} \left(1 + 2(\gamma^{-2} + \vartheta^2) \right) - 6 \left(1 + (\gamma^{-2} + \vartheta^2) \right) \\ & - 4n^{-2} \left(1 - 2\vartheta^2 \right) \left(1 + 2(\gamma^{-2} + \vartheta^2) \right) - 3 \left(1 - 2\vartheta^2 \right) \left(1 + 2(\gamma^{-2} + \vartheta^2) \right) \\ & \left. \left. + 2 \left(1 - 2\vartheta^2 \right) \left(1 + (\gamma^{-2} + \vartheta^2) \right) + \left(1 - 8\vartheta^2 \right) \frac{1}{4} \left(1 + 2(\gamma^{-2} + \vartheta^2) \right) \right] \\ & + J_n J_n' \left[-\frac{35}{2} n^{-1} \left(1 + \frac{3}{2} (\gamma^{-2} + \vartheta^2) \right) + 6 \left(1 + \frac{1}{2} (\gamma^{-2} + \vartheta^2) \right) \right. \\ & \left. + 14n^{-1} \left(1 - 2\vartheta^2 \right) \left(1 + \frac{3}{2} (\gamma^{-2} + \vartheta^2) \right) \right. \\ & \left. - 2n^{-1} \left(1 - 2\vartheta^2 \right) \left(1 + \frac{1}{2} (\gamma^{-2} + \vartheta^2) \right) - \frac{1}{2} n^{-1} \left(1 - 8\vartheta^2 \right) \left(1 + \frac{3}{2} (\gamma^{-2} + \vartheta^2) \right) \right] \\ & + (J_n')^2 \left[\frac{19}{4} n^{-2} \left(1 + (\gamma^{-2} + \vartheta^2) \right) + 4 \left(1 + (\gamma^{-2} + \vartheta^2) \right) - 3n^{-2} \left(1 - 2\vartheta^2 \right) \left(1 + (\gamma^{-2} + \vartheta^2) \right) \right. \\ & \left. - 4 \left(1 - 2\vartheta^2 \right) \left(1 + (\gamma^{-2} + \vartheta^2) \right) + \frac{1}{4} \left(1 - 8\vartheta^2 \right) \left(1 + (\gamma^{-2} + \vartheta^2) \right) \right] \quad (4.95) \end{aligned}$$

Til ledende orden har vi

$$\frac{dI}{d\Omega d\omega} = \frac{m^2 G}{4\pi c} \frac{n^2 \beta^4}{(1 - \beta^2)} \left(4\vartheta^2 J_n^2 - \frac{4}{n} \left(\frac{1}{\gamma^2} + 6\vartheta^2 \right) J_n J_n' + \left(\frac{2}{n^2} + 8\vartheta^2 \right) (J_n')^2 \right) \quad (4.96)$$

Vi erstatter videre $J_n(n\beta \sin \theta)$ og $J'_n(n\beta \sin \theta)$ med henholdsvis $K_{\frac{1}{3}}(\xi)$ og $K_{\frac{2}{3}}(\xi)$, på samme måte som vi gjorde det i det elektromagnetiske tilfellet. Parameteren ξ er gitt ved ligning (4.42). Vi bruker (4.37), (4.38), (4.40), (4.41), (4.43) og (4.44), og finner

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\Omega d\omega} &= \frac{m^2 G}{12\pi^3 c} n^2 \beta^4 \gamma^2 \left(4\vartheta^2 \left(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right) K_{\frac{1}{3}}(\xi)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{n} \left(\frac{1}{\gamma^2} + 6\vartheta^2 \right) \left(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right)^{\frac{3}{2}} K_{\frac{1}{3}}(\xi) K_{\frac{2}{3}}(\xi) + \left(\frac{2}{n^2} + 8\vartheta^2 \right) \left(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right)^2 K_{\frac{2}{3}}(\xi)^2 \right) \end{aligned} \quad (4.97)$$

Dette er utstrålt energi i den ekstremt relativistiske grensen, som funksjon av frekvens og stråleretning.

Om vi sammenligner med det analoge elektromagnetiske uttrykket (4.47), ser vi at (4.97) er mer komplisert. For det første inneholder det kryssledd med de modifiserte Besselfunksjonene, $K_{\frac{1}{3}} \cdot K_{\frac{2}{3}}$. Men det virkelige problemet ligger i ulik n -avhengighet i de forskjellige ledd. Det vil vise seg etterhvert.

4.2.4 Gjennomsnittlig utstrålt effekt per frekvens og romvinkelhet

Gjennomsnittlig utstrålt effekt i romvinklelementet $d\Omega$ fås, helt analogt til det elektromagnetiske tilfellet, ved å dele (4.86) på omløpstiden $t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Ligningene (4.86) og (4.97) gir energi per *frekvensenhet*. For å få ustrålt effekt ved n 'te *overharmoniske frekvens* må vi multiplisere med avstanden mellom frekvens n og $n+1$: ω_0 . Ligning (4.86) gir følgende effekt:

$$\begin{aligned} \frac{dP_n}{d\Omega} &= \frac{m^2 G \omega_0^2}{8\pi^2 c} \frac{n^2 \beta^4}{(1-\beta^2)} \left(J_{n-2}^2 + J_{n+2}^2 - \sin^2 \theta [J_{n-2}^2 + J_{n+2}^2 + J_{n-2} J_n + J_n J_{n+2}] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} \sin^4 \theta [J_{n-2}^2 + 4J_n^2 + J_{n+2}^2 + 4J_{n-2} J_n + 4J_n J_{n+2} + 2J_{n-2} J_{n+2}] \right) \end{aligned} \quad (4.98)$$

I den ekstremt relativistiske grensen får vi

$$\begin{aligned} \frac{dP_n}{d\Omega} &\simeq \frac{m^2 G \omega_n^2}{24\pi^4 c} \beta^4 \gamma^2 \left(4\vartheta^2 \left(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right) K_{\frac{1}{3}}(\xi)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{n} \left(\frac{1}{\gamma^2} + 6\vartheta^2 \right) \left(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right)^{\frac{3}{2}} K_{\frac{1}{3}}(\xi) K_{\frac{2}{3}}(\xi) + \left(\frac{2}{n^2} + 8\vartheta^2 \right) \left(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right)^2 K_{\frac{2}{3}}(\xi)^2 \right) \end{aligned} \quad (4.99)$$

Dette er utstrålt effekt med frekvens $w_n = n\omega_0$ inn i romvinklelementet $d\Omega$.

4.2.5 Effekt i en romvinkelretning

Vi kan finne et tilnærmet uttrykk for totalt utstrålt effekt i en romvinkel retning i det ekstremt relativistiske tilfellet. Analogt med det elektromagnetiske tilfellet gjelder nemlig

$$\frac{dP}{d\Omega} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dP_n}{d\Omega} \simeq \frac{1}{\omega_0} \int_0^{\infty} \frac{dP}{d\omega d\Omega} d\omega \quad (4.100)$$

der vi har

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\omega d\Omega} &\simeq \frac{m^2 G \omega^2}{24\pi^4 c} \beta^4 \gamma^2 \left(4\vartheta^2 \left(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right) K_{\frac{1}{3}}(\xi)^2 \right. \\ &\left. - \frac{4}{n} \left(\frac{1}{\gamma^2} + 6\vartheta^2 \right) \left(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right)^{\frac{3}{2}} K_{\frac{1}{3}}(\xi) K_{\frac{2}{3}}(\xi) + \left(\frac{2}{n^2} + 8\vartheta^2 \right) \left(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right)^2 K_{\frac{2}{3}}(\xi)^2 \right) \end{aligned} \quad (4.101)$$

I Appendix B.3.2 har vi regnet ut (4.100) og funnet

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= 1.58 \cdot 10^{-2} \frac{c G m^2}{r_0^2} (\gamma^{-2} + \vartheta^2)^{-\frac{7}{2}} \beta^4 \gamma^2 \left(\vartheta^2 \right. \\ &\left. - 69.3 \left(\frac{1}{\gamma^2} + 6\vartheta^2 \right) \left(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right)^2 - \left(69.3(\gamma^{-2} + \vartheta^2)^3 - 242\vartheta^2 \right) \left(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.102)$$

Dette er gjennomsnittlig utstrålt effekt i en romvinkelretning, og vi skal se nærmere på det i neste kapittel.

4.2.6 Totalt utstrålt effekt

Vi kan analogt med det vi gjorde for elektromagnetisk stråling, finne totalt utstrålt effekt i de ekstremt relativistiske tilfellet, ved å integrere (4.102) over alle romvinkler. Vi bruker (4.35), og setter inn (4.102):

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \frac{dP}{d\Omega} \sin\theta d\theta d\phi = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dP}{d\Omega} \left(1 - \frac{1}{2}\vartheta^2\right) d\vartheta \\ &= 1.58 \cdot 10^{-2} \frac{c G m^2}{r_0^2} \beta^4 \gamma^2 4\pi \left[\sqrt{\frac{1}{g^2} + v^2} \left(\frac{693(1 + 16\gamma^2)v}{160\gamma^2} + \frac{693v^3}{80} - \frac{\gamma^4(1 + 2\gamma^2)v}{10(1 + \gamma^2 v^2)^3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\gamma^2(-605 - 1207\gamma^2 + \gamma^4)v}{15(1 + \gamma^2 v^2)^2} + \frac{10395 + 30470\gamma^2 + 4834\gamma^4 + 8\gamma^6 v}{60(1 + \gamma^2 v^2)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{11(63 + 4536\gamma^2 + 7808\gamma^4) \log(\gamma^2 v + \gamma^2 \sqrt{\gamma^{-2} + v^2})}{160\gamma^4} \right) \right] \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned} \quad (4.103)$$

Setter vi inn grensene og regner ut, får vi til ledende orden i det ekstremt relativistiske tilfellet:

$$\begin{aligned}
 P &= 1.58 \cdot 10^{-2} \frac{cGm^2}{r_0^2} \gamma^2 4\pi \frac{2g^{14}\pi^5 \sqrt{\frac{4}{g^2} + \pi^2}}{15g^4(4 + g^2\pi^2)^3} \\
 &= 2.65 \cdot 10^{-2} cG \left(\frac{m}{r_0}\right)^2 \gamma^6 \qquad (4.104)
 \end{aligned}$$

Dette er totalt utstrålt effekt i form av gravitasjonsstråling fra en ladning i sirkelbevegelse. Sammenligner vi dette med ligning (4.57) ser vi at utstrålt effekt som gravitasjonsstråling øker raskere med hensyn på γ enn utstrålt effekt i form av elektromagnetisk stråling (henholdsvis γ^6 og γ^4).

Kapittel 5

Energiutstrålingen sammenlignet

Vi skal i dette kapittelet sammenligne utstrålt energi i form av elektromagnetisk stråling mot utstrålt energi i form av gravitasjonstråling. Vi vil sammenligne totalt emittert effekt, og se på vinkelfordeling og frekvensspektrum i den ekstremt relativistiske grensen.

5.1 Et elektron ved romtemperatur

Først vil vi se på forskjellen i totalt utstrålt energi for termiske elektroner $T=300\text{K}$, med

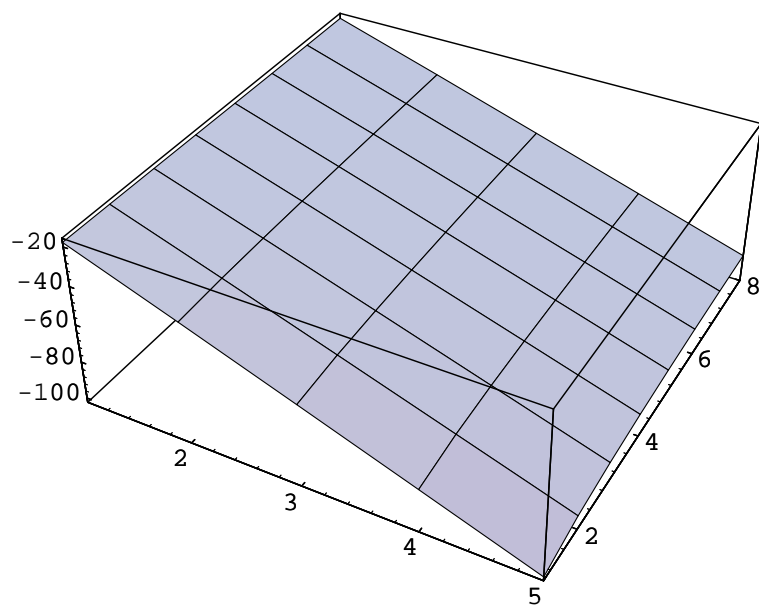
$$\frac{1}{2}m_e v^2 \sim kT \Rightarrow \beta \sim 10^{-4} \quad (5.1)$$

der $k = 1.38 \cdot 10^{-23}\text{J/K}$ er Boltsmanns konstant, og elektronmassen $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}\text{ kg}$. Termiske elektroner i sirkelbevegelse er muligens ikke et særlig interessant eksempel, men gir oss en ide om forholdet mellom utsendt gravitasjonsenergi og elektromagnetisk energi.

5.1.1 Elektromagnetisk stråling

I det elektromagnetiske tilfellet bruker vi (4.49). For en så liten β vil bidraget fra $\omega = \omega_0$ dominere sterkt, som vist i Figur 5.1. Får $n = 1$ går (4.49)

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{d\Omega} &= 3 \cdot 10^{-46} \omega_0^2 \left(2(J_0^2(10^{-4} \sin \theta) + J_2^2(10^{-4} \sin \theta)) \right. \\ &\quad \left. - \sin^2 \theta (J_0(10^{-4} \sin \theta) + J_2(10^{-4} \sin \theta))^2 \right) \end{aligned} \quad (5.2)$$



Figur 5.1: Logaritmisk utstrålt effekt i form av elektromagnetisk stråling fra et elektron i sirkelbevegelse ved romtemperatur, som funksjon θ og n .

Her har vi satt inn tomromspermeabiliteten $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (H/m), og elektronladningen $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ (C). For å få totalt utstrålt effekt, må vi integrere over alle romvinkler:

$$\Delta P_{elmag} = \int_0^\pi \frac{dP_1}{d\Omega} 2\pi \sin \theta d\theta \quad (5.3)$$

Ved enkel numerisk integrasjon fås

$$\Delta P_{elmag} \sim 1 \cdot 10^{-44} \omega_0^2 \quad \text{W} \quad (5.4)$$

Selvsagt en svært liten liten effekt.

5.1.2 Gravitasjonsstråling

For gravitasjonstråletap bruker vi (4.98). I Figur 5.2 ser vi at bidraget fra $\omega = 2\omega_0$ dominerer sterkt her. Vi setter inn for $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg, $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg² og $n = 2$, og får

$$\begin{aligned} \frac{dP_2}{d\Omega} \simeq & 2 \cdot 10^{-96} \omega_0^2 (J_{-1}^2 + J_3^2 - \sin^2 \theta [J_{-1}^2 + J_3^2 + J_{-1}J_1 + J_1J_3]) \\ & + \frac{1}{8} \sin^4 \theta [J_{-1}^2 + 4J_1^2 + J_3^2 + 4J_{-1}J_1 + 4J_1J_3 + 2J_{-1}J_3] \end{aligned} \quad (5.5)$$

Argumentet til Besselfunksjonene er $x = n\beta \sin \theta = 2 \cdot 10^{-4} \sin \theta$.

Vi integrerer over alle romvinkler

$$\Delta P_{grav} = \int_0^\pi \frac{dP_2}{d\Omega} 2\pi \sin \theta d\theta \quad (5.6)$$

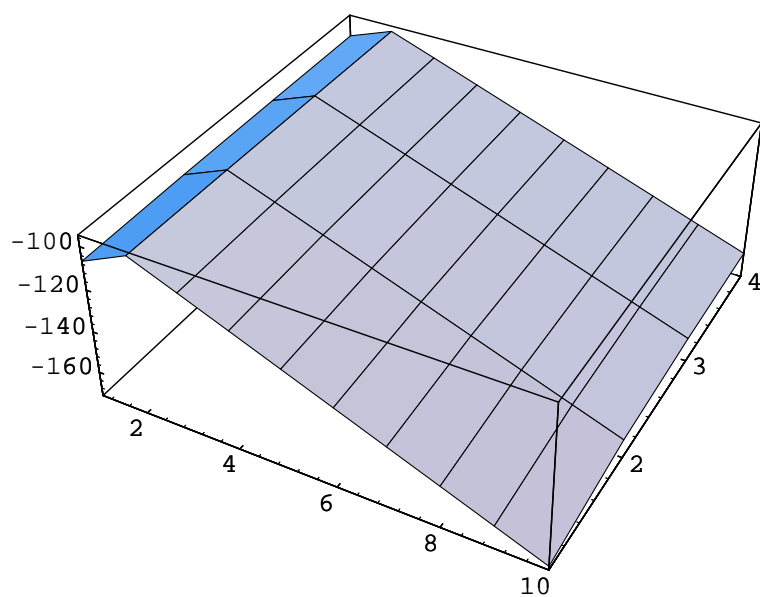
Enkel numerisk integrasjon gir

$$\Delta P_{grav} \sim 1 \cdot 10^{-96} \omega_0^2 \quad \text{W} \quad (5.7)$$

Sammenligner vi (5.4) med (5.7) ser vi at det stråles ut $1 \cdot 10^{52}$ mer energi per sekund i form av elektromagnetisk stråling enn gravitasjonstråling fra et elektron i sirkelbane ved romtemperatur. Relativt sett er gravitasjonsstråleenergien totalt neglisjerbar!

5.1.3 Endre andelen utsendt gravitasjonsenergi

Sammenligner vi (4.86) med (4.29) legger vi merke til at andelen utsendt gravitasjonsenergi lar seg øke. Faktorer som må taes i betraktning:



Figur 5.2: Logaritmisk utstrålt effekt i form av gravitasjonsstråling fra et elektron i sirkelbevegelse ved romtemperatur, som funksjon θ og n .

- Massen til partikkelen. Vi ser fra (4.86) at effekten avhenger av massen i kvadrat. Hadde partikkelen vært et proton ville det med lik β betydd en faktor $3.5 \cdot 10^6$. Hadde elektronet (eller partikkelen med ladning e), veid 1 kg (og fremdeles samme β), ville systemet strålt ut 10^8 så mange ganger gravitasjonsenergi som elektromagnetisk energi!
- Verdien av β . Når $\beta \rightarrow 1$ vil relativ andel gravitasjonsenergi øke med 10^8 , siden prefaktorene i (4.29) går som β^2 , mens prefaktorene i (4.86) går som β^4 .
- Den relativistiske γ -faktoren. Gravitasjonsenergi stråles ut proporsjonalt med en faktor γ^2 i forhold til elektromagnetisk energi. Når $\beta \rightarrow 1$ vil $\gamma \rightarrow \infty$. I et ekstremt relativistisk tilfelle vil det derfor kunne stråles ut mer energi fra elektronet i form av gravitasjonsstråling enn i form av elektromagnetisk stråling.

I neste avsnitt vil vi se på ultrarelativistiske hastigheter, altså svært store γ -verdier.

5.2 Elektron med relativistisk hastighet

Vi vet fra avsnitt 5.1.3 at dess høyere hastighet elektronet har, jo større andel av utstrålt energi vil være i form av gravitasjonsstråling. For å finne en realistisk γ -verdi, vil vi se spesifikt på hvor mye det er mulig å akselerere en partikkel i to av de store såkalte synkrotronene.

5.2.1 Høy-energi akseleratorer

Alle store akseleratorer frem til og med i dag bygger på vekselvirkning mellom en ladet partikkel og et elektromagnetisk felt. I *synkrotroner* fører denne vekselvirkningen til at partikkelen går i ring. I Tabell 5.1 har vi vist noen tall fra såkalte høy-energi sirkulære akseleratorer.

5.2.2 LEP-akseleratoren

Vi skal som et eksempel spesielt ta for oss LEP-akseleratoren i CERN. Vi ser fra Tabell 5.1 at et elektron i LEP vil ha en maksimal energi

$$E = \gamma m_e c^2 = 55 \text{ GeV} = 55 \cdot 10^9 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 8.8 \cdot 10^{-9} \text{ J} \quad (5.8)$$

Tabell 5.1: Tre høy-energi akseleratorer ([7],[12]).

Akselerator	LEP (CERN)	Tevatron (Fermilab)	LHC (CERN)
Partikkeltype	Elektron, positron	Proton, antiproton	Proton
Start år	1989	1987	2002
Maksimal energi (GeV)	55	900 - 1000	$7.0 \cdot 10^3$
Omkrets (km)	26.66	6.28	26.659

En slik energi tilsvarer

$$\gamma = 1.1 \cdot 10^5 \quad (5.9)$$

Putter vi denne inn i uttrykkene for totalt utstrålt effekt, (4.57) og (4.104) får vi for henholdsvis elektromagnetisk stråling (indeks 'elmag') og gravitasjonsstråling (indeks 'grav'):

$$P_{elmag} = 1.64 \cdot \frac{\mu_0 c^3}{\pi^3} \left(\frac{e}{r_0}\right)^2 \gamma^4 = 3.75 \cdot 10^{-7} \text{ W} \quad (5.10)$$

$$P_{grav} = 2.65 \cdot 10^{-2} cG \left(\frac{m}{r_0}\right)^2 \gamma^6 = 4.33 \cdot 10^{-41} \text{ W} \quad (5.11)$$

Fremdeles en faktor 10^{-34} i forskjell! Her har vi brukt omkretsen oppgitt i Tabell 5.1 til å bestemme radius:

$$r_0 = \frac{26.66 \cdot 10^3}{2\pi} = 4243 \text{ m} \quad (5.12)$$

For et elektron med termisk energi så vi i avsnitt 5.1 at det ble strålt ut $\sim 10^{52}$ mer elektromagnetisk energi enn gravitasjonsenergi. Forbedringen ved å bruke LEP-akseleratoren er en faktor 10^{18} ($52-34=18$). Dette passer med det vi spådde i avsnitt 5.1.3, da $\beta = 0.001 \rightarrow \beta = 1$ gir en faktor $(10^4)^2 = 10^8$, og $\gamma = 1 \rightarrow \gamma = 1.1 \cdot 10^5$ gir en faktor $\sim (10^5)^2 = 10^{10}$. Dermed forbedres andelen utsendt gravitasjonsenergi med en faktor $\sim 10^{8+10}$, som stemmer overrens med det vi faktisk har regnet ut.

5.2.3 LHC-akseleratoren

Et annet eksempel er den planlagte LHC-akseleratoren i CERN. Vi ser fra Tabell 5.1 at et **proton** med masse $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg i LHC vil ha en maksimal energi

$$E = \gamma m_p c^2 = 7.0 \cdot 10^3 \text{ GeV} = 7.0 \cdot 10^{12} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1.1 \cdot 10^{-6} \text{ J} \quad (5.13)$$

En slik energi tilsvarer

$$\gamma = 7.3 \cdot 10^3 \quad (5.14)$$

Den store økningen i energi kan ikke kompensere for den økte massen (m_p) som skal akselereres, slik at γ -faktoren for LHC blir mindre enn for LEP.

Putter vi inn γ -faktoren i uttrykkene for totalt utstrålt effekt, (4.57) og (4.104), og bruker r_0 fra (5.12), får vi:

$$P_{elmag} = 1.64 \cdot \frac{\mu_0 c^3}{\pi^3} \left(\frac{e}{r_0}\right)^2 \gamma^4 = 7.3 \cdot 10^{-12} \text{ W} \quad (5.15)$$

$$P_{grav} = 2.65 \cdot 10^{-2} cG \left(\frac{m}{r_0}\right)^2 \gamma^6 = 1.1 \cdot 10^{-41} \text{ W} \quad (5.16)$$

Fremdeles en faktor 10^{-30} i forskjell. Men vi ser at det elektromagnetisk strålingstapet fra LHC er mindre ved maksimal energi enn ved LEP.

5.2.4 Vendepunktsenergien

Forholdet mellom utstrålt gravitasjonsenergi og elektromagnetisk energi i den ekstremt relativistiske grensen, kan ved bruk av uttrykkene for utstrålt effekt, (4.57) og (4.104), skrives

$$\frac{P_{grav}}{P_{elmag}} = \frac{2.65 \cdot 10^{-2} \frac{1}{c^3} G \left(\frac{mc^2}{r_0}\right)^2 \gamma^6}{1.64 \cdot \frac{\mu_0 c^3}{\pi^3} \left(\frac{e}{r_0}\right)^2 \gamma^4} = 3.64 \cdot 10^{-56} \left(\frac{E}{e}\right)^2 \text{ C}^2 \text{J}^{-2} \quad (5.17)$$

Her har vi satt inn $E = \gamma mc^2$. Forholdet E/e er energien uttrykt i elektronvolt (eV).

Hvilken energi per partikkel kreves i partikkelstrålen i en akselerator, for at andelen utstrålt gravitasjonsenergi skal bli av størrelsesorden 1? Denne energien E_c kan vi kalle *vendepunktsenergien*, og ved hjelp av (5.17) finner vi

$$E_c = 5.2 \cdot 10^{15} \text{ TeV} \quad (5.18)$$

Slike energier er ikke realistisk å oppnå i dag. Og man må trolig tilføre en gigantisk effekt til akseleratoren for å klare det, idet en ladet partikkel ved så store energier stråler ut svært mye. I tillegg er det tvilsomt om svakt-felt approksimasjonen (3.12) er gyldig ved så store energier.

5.3 Vinkelspektrum for emittert stråling

Vi vil se på vinkelavhengigheten i den ekstremt relativistiske grensen. Siden problemet er symmetrisk om z -aksen, ser vi på vinkelavhengigheten i forhold til ϑ .

For å få problemet universelt, skalerer vi vinkelen ved å innføre

$$\lambda = \vartheta\gamma \quad (5.19)$$

Først skal vi se på det elektromagnetiske tilfellet.

5.3.1 Elektromagnetisk vinkelspektrum

Om vi setter inn (5.19) i (4.54), får vi total utstrålt effekt som funksjon av romvinkelretning

$$\frac{dP}{d\Omega} = 0.386 \cdot \frac{\mu_0 c^3 e^2}{\pi^4 r_0^2} \frac{\gamma^5}{(1 + \lambda^2)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\lambda^2}{(1 + \lambda^2)} + 1.40 \right) \quad (5.20)$$

Det tilhørende vinkelspektrum er vist i Figur 5.3. Av figuren ser vi at den utstrålte effekt kraftig faller av når vinkelen øker, og i større grad ved økende γ . Ved store γ vil mesteparten av energien stråles ut ved svært små vinkler, slik at approksimasjonen i forrige kapittel er gyldig.

5.3.2 Vinkelspektrum for gravitasjonstråling

Om vi setter inn (5.19) i (4.102) får vi total utstrålt effekt i form av gravitasjonstråling som funksjon av romvinkelretning:

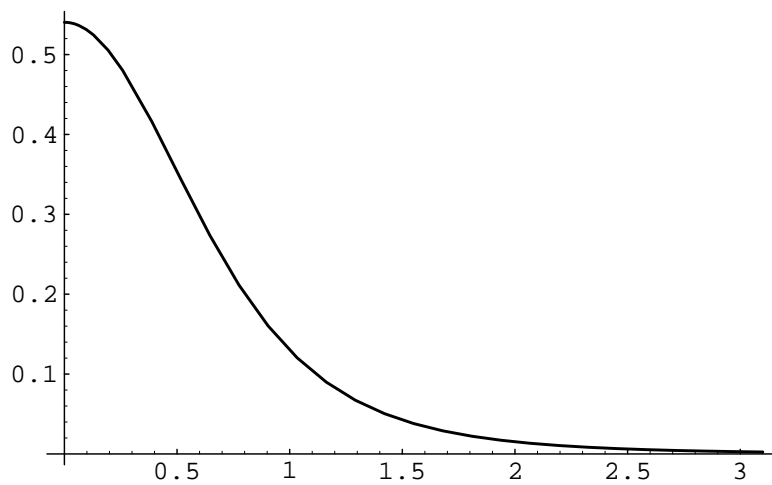
$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} = 1.58 \cdot 10^{-2} \frac{cGm^2}{r_0^2} \beta^4 \gamma^7 (1 + \lambda^2)^{-\frac{7}{2}} \left(\lambda^2 \right. \\ \left. - \frac{69.3}{\gamma^4} (1 + 6\lambda^2) (1 + \lambda^2)^2 - \left(\frac{69.3}{\gamma^6} (1 + \lambda^2)^3 + \frac{242}{\gamma^2} \lambda^2 \right) (1 + \lambda^2) \right) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Her er det klart at siden $\gamma \gg 1$ kan andre og tredje ledd neglisjeres, slik at vi står igjen med

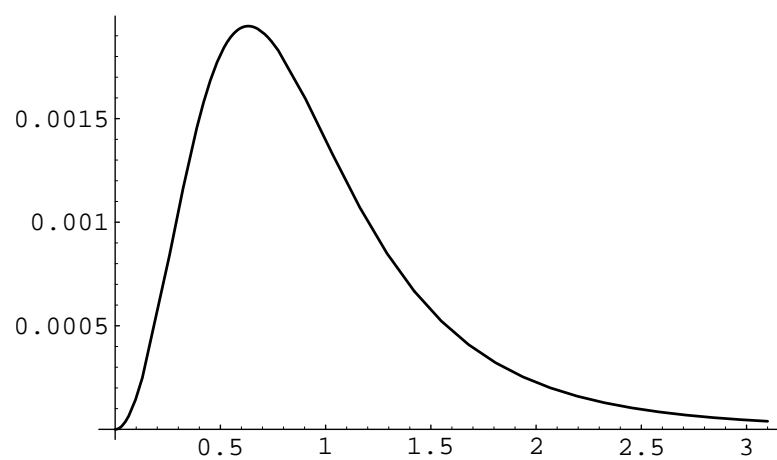
$$\frac{dP}{d\Omega} = 1.58 \cdot 10^{-2} \frac{cGm^2}{r_0^2} \beta^4 \gamma^7 \lambda^2 (1 + \lambda^2)^{-\frac{7}{2}} \quad (5.22)$$

Det resulterende vinkelspektrum er vist i Figur 5.4. Av figuren går det frem at total emittert effekt når en topp, som ved derivasjon av (5.22) viser seg å ligge ved $\lambda_{max} = \gamma\vartheta_{max} = 0.632$. For store γ skjer dette ved en svært liten vinkel. Ved større vinkler faller intensiteten raskt av. Dette rettferdiggjør approksimasjonen gjort i Kapittel 4.2.3.

Sammenligner vi Figur 5.3 med Figur 5.4, ser vi at vinkelspektrumet har forskjellig form. Begge faller av ved store vinkler, men kun utstrålt gravitasjonsenergi



Figur 5.3: Total utstrålt elektromagnetisk effekt som funksjon av vinkel.



Figur 5.4: Total utstrålt gravitasjonseffekt som funksjon av vinkel.

faller av ved små vinkler. Det åpner for et interessant spørsmål: Hvordan er andelen utstrålt gravitasjonsenergi i retning $\lambda = \lambda_{max} = 0.632$? Som eksempel kan vi ta LEP-akseleratoren. Vi vet fra (5.9) at $\gamma = 1.1 \cdot 10^5$. Det gir $\vartheta_{max} = 5.75 \cdot 10^{-6}$. Setter vi dette får vi

$$\left. \frac{\frac{dP}{d\Omega}_{grav}}{\frac{dP}{d\Omega}_{elmag}} \right|_{\vartheta=\vartheta_{max}, \gamma=1.1 \cdot 10^5} = \frac{1.946 \cdot 10^{-3} \frac{cGm^2}{r_0^2} \gamma^7}{0.2808 \frac{\mu_0 c^3 e^2}{\pi^4 r_0^2} \gamma^5} = 1.56 \cdot 10^{-34} \quad (5.23)$$

Så selv ved denne spesielle vinkelen er andelen gravitasjonsenergi fra et LEP-elektron veldig liten.

5.4 Frekvensspektrum

5.4.1 De modifiserte Besselfunksjonene

Vi ser litt nærmere på forløpet til de modifiserte Besselfunksjonene $K_{\frac{1}{3}}(x)$ og $K_{\frac{2}{3}}(x)$. Figur 5.5 viser forløpet til $K_{\frac{2}{3}}(x)^2$, $K_{\frac{1}{3}}(x) \cdot K_{\frac{2}{3}}(x)$ og $K_{\frac{1}{3}}(x)^2$.

Ligning (3.104) i Jackson[3] viser at $K_{\frac{1}{3}}(x)$ og $K_{\frac{2}{3}}(x)$ vil gå asymptotisk mot null når $x \gg 1$:

$$x \gg 1, \nu : \quad K_\nu(x) \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) \right] \quad (5.24)$$

$K_{\frac{1}{3}}(x)^2$, $K_{\frac{1}{3}}(x) \cdot K_{\frac{2}{3}}(x)$ og $K_{\frac{2}{3}}(x)^2$ vil altså gå mot samme verdi når $x \gg 1$. Dette bekreftes av Figur 5.5.

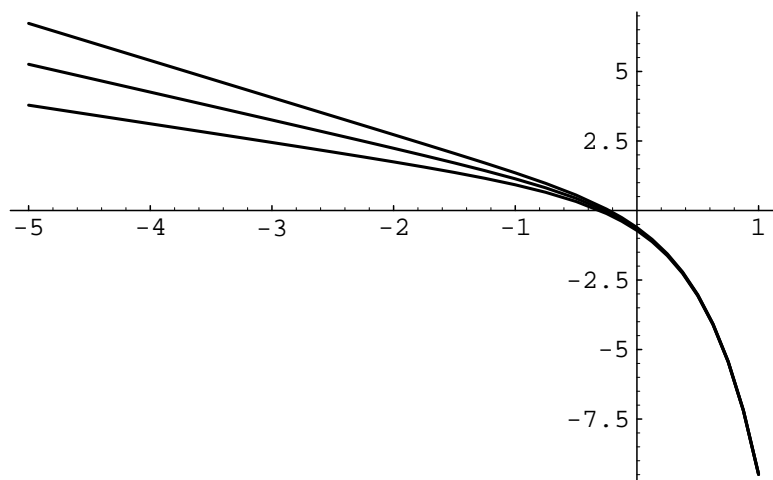
Ligning (3.103) i Jackson[3] viser at $K_{\frac{1}{3}}(x)$ og $K_{\frac{2}{3}}(x)$ blir uendelig stor når $x \rightarrow 0$:

$$x \ll 1, \nu \neq 0 : \quad K_\nu(x) \rightarrow \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \quad (5.25)$$

$K_{\frac{2}{3}}(x)^2$ blir altså markert større enn $K_{\frac{1}{3}}(x) \cdot K_{\frac{2}{3}}(x)$ og $K_{\frac{1}{3}}(x)^2$ når $x \rightarrow 0$. Dette bekreftes også av Figur 5.5.

5.4.2 Kritisk frekvens og kritisk vinkel

Uttrykkene (4.51) og (4.99) gir utstrålt effekt fra et ekstremt relativistisk elektron, henholdsvis i form av elektromagnetisk stråling og gravitasjonsstråling. Begge



Figur 5.5: Fra øverst til nederst: $K_{\frac{2}{3}}(x)^2$, $K_{\frac{1}{3}}(x) \cdot K_{\frac{2}{3}}(x)$ og $K_{\frac{1}{3}}(x)^2$. Begge aksene har logaritmisk skala.

avhenger av de modifiserte Besselfunksjonene $K_{\frac{1}{3}}(\xi)$ og $K_{\frac{2}{3}}(\xi)$, der vi i den ekstremt relativistiske grensen setter

$$\xi = \frac{n}{3} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \vartheta^2 \right)^{\frac{3}{2}} \quad (5.26)$$

Fra ligning (5.24) ser vi at intensiteten i strålingen blir neglisjerbar for $\xi \gg 1$. Fra (5.26) ser vi at det hender ved store vinkler. Jo større vinkelfrekvens ω , jo mindre blir den kritiske vinkelen i så måte. Om bare ω blir stor nok, vil ξ bli stor ved alle vinkler. Da vil en neglisjerbar energimengde emitteres ved denne frekvensen. En kan definere en *kritisk frekvens* ω_c der $\xi = 1$ for $\vartheta = 0$. Vi finner

$$\omega_c = 3\gamma^3 \left(\frac{c}{r_0} \right) \quad (5.27)$$

Det tilhørende *kritiske harmoniske nummer* er

$$n_c = 3\gamma^3 \quad (5.28)$$

For elektroner i LEP-akseleratoren, ser vi fra Tabell 5.1 og ligning (5.9), at det kritiske harmoniske nummer blir

$$n_c = 4 \cdot 10^{15} \quad (5.29)$$

Vi vet at for ekstremt relativistiske hastigheter vil utstrålingen stort sett være konsentrert i et lite vinkelområde om baneplanet. Spredningen i vinkel ved en gitt frekvens kan estimeres ved å bestemme vinkelen ϑ_c der $\xi(\vartheta_c) \simeq \xi(0) + 1$ (jfr. Figur 5.5). Fra ligning (5.26) finner vi

$$\vartheta_c = \sqrt{\left(\frac{1}{\gamma^3} + \frac{3}{n} \right)^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{\gamma^2}} \quad (5.30)$$

Ved det kritiske harmoniske nummer er $\vartheta_c \sim \gamma^{-1} \Rightarrow \lambda = \gamma\vartheta = 1$. Om vi sammenligner med vinkelspektrumet til total utstrålt effekt, Figur 5.3, ser vi at ved vinkler $\lambda \gg 1$ er også den totale utstrålte energi liten.

Med dette i bakhodet kan vi nå prøve å finne frekvensfordelingen av utstrålt energi i det ekstremt relativistiske tilfellet.

5.4.3 Elektromagnetisk frekvensspektrum

Vi tar utgangspunkt i (4.51),

$$\frac{dP_n}{d\Omega} = \frac{\mu_0 c \omega_n^2 e^2}{24\pi^4} \left(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right)^2 \left(\frac{\vartheta^2}{\left(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right)} K_{\frac{1}{3}}(\xi)^2 + K_{\frac{2}{3}}(\xi)^2 \right) \quad (5.31)$$

Vi skal integrere over alle romvinkler, det vil si finne effekt per harmoniske:

$$P_n = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dP_n}{d\Omega} \cos \vartheta d\vartheta \simeq 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP_n}{d\Omega} d\vartheta = 4\pi \int_0^{\infty} \frac{dP_n}{d\Omega} d\vartheta \quad (5.32)$$

Vi ønsker å finne en γ -uavhengig form av frekvensspekteret, og bytter integrasjonsvariabel til ξ :

$$d\xi = \frac{n}{3}(\gamma^{-2} + \vartheta^2)^{\frac{1}{2}} 2\vartheta d\vartheta \quad (5.33)$$

og får

$$P_n = \frac{\mu_0 c \omega_n^2 e^2}{6\pi^3} \frac{3}{2n} \int_{\frac{n}{n_c}}^{\infty} d\xi \frac{1}{\vartheta} \left(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\vartheta^2}{\left(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right)} K_{\frac{1}{3}}(\xi)^2 + K_{\frac{2}{3}}(\xi)^2 \right) \quad (5.34)$$

Vi setter inn

$$\vartheta = \sqrt{\left(\frac{3\xi}{n} \right)^{\frac{2}{3}} - \gamma^{-2}} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\left(\xi \frac{n_c}{n} \right)^{\frac{2}{3}} - 1} \quad (5.35)$$

og får

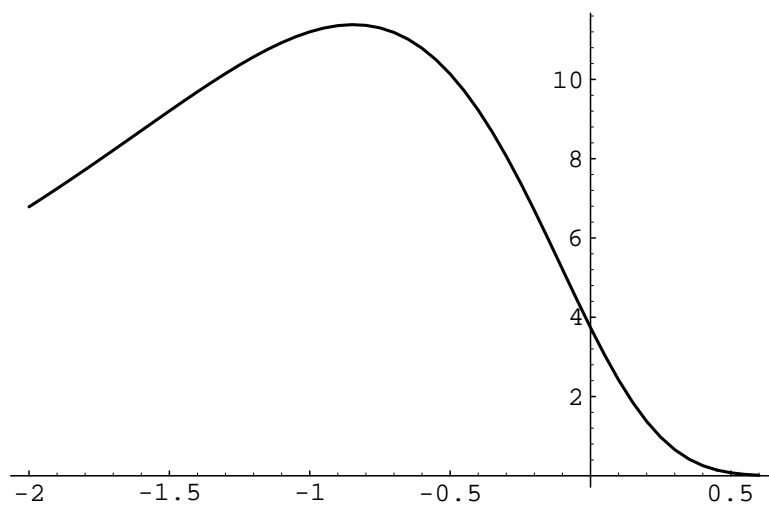
$$P_n = \frac{3\mu_0 c \omega_0^2 e^2 \gamma}{4\pi^3} \int_{\frac{n}{n_c}}^{\infty} d\xi \frac{\xi}{\sqrt{\left(\xi \frac{n_c}{n} \right)^{\frac{2}{3}} - 1}} \left(\frac{\left(\xi \frac{n_c}{n} \right)^{\frac{2}{3}} - 1}{\left(\xi \frac{n_c}{n} \right)^{\frac{2}{3}}} K_{\frac{1}{3}}(\xi)^2 + K_{\frac{2}{3}}(\xi)^2 \right) \quad (5.36)$$

På Figur 5.6 og Figur 5.7 er effektspekteret i (5.36) vist. Ut fra Figur 5.7 kan vi også se at kriteriene for approksimasjonen vi gjorde i Kapittel (4), ligningene (4.37) - (4.39), er oppfylt. Det meste av energien vil nemlig stråles ut med harmonisk nummer like under $n_c \sim \gamma^3$, og dermed vil $s \sim 1$ i dette området.

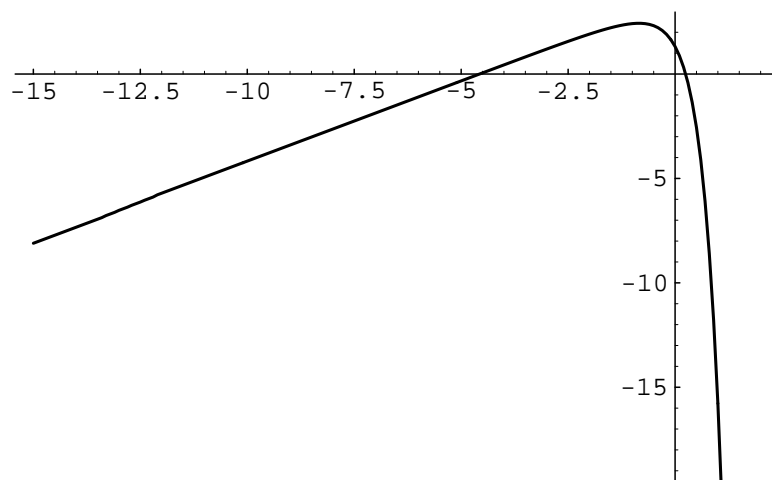
Ved lave frekvenser

Vi vil nå prøve å estimere effektspektrumet for lave frekvenser ($n \ll n_c$). I stedet for å integrere (5.31) over romvinkler, kan vi for hver frekvens bruke (5.31) evaluert i $\vartheta = 0$, og verdien av $\vartheta_c = \sqrt{\left(\frac{3}{n} \right)^{\frac{2}{3}}}$ for denne frekvensen. Ved å benytte (5.25) og (5.30) får vi

$$\begin{aligned} P_n &\sim 2\pi \vartheta_c \left. \frac{dP_n}{d\Omega} \right|_{\vartheta=0} \simeq \sqrt{\left(\frac{3}{n} \right)^{\frac{2}{3}}} \frac{\mu_0 c \omega_0^2 n^2 e^2}{12\pi^3} \frac{1}{\gamma^4} \left(\frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{2} \left(\frac{2}{\frac{n}{3\gamma^3}} \right)^{\frac{2}{3}} \right)^2 \\ &= 0.02 \mu_0 c \omega_0^2 e^2 n^{\frac{1}{3}} \sim n^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \quad (5.37)$$



Figur 5.6: Frekvensspektrum til emittert elektromagnetisk effekt fra et elektron i sirkelbane.



Figur 5.7: Logaritmisk frekvensspektrum til emittert elektromagnetisk effekt fra et elektron i sirkelbane.

Det elektromagnetiske frekvensspektrum fra et elektron i sirkulær bevegelse øker som $n^{\frac{1}{3}}$ ved lave frekvenser.

Ligning (5.37) impliserer at $\ln(P_n) \sim \frac{1}{3} \ln(n)$. Det vil si at det logaritmiske frekvensspekteret er en rett linje med helning $\frac{1}{3}$ ved lave frekvenser. Sammenligner vi med Figur 5.7 ser vi at dette stemmer.

Ved høye frekvenser

Vi vil nå prøve å estimere effektspektrumet for store frekvenser ($n \gg n_c$). Vi gjør det på samme måte som for lave frekvenser. Den kritiske frekvensen (5.30) blir i dette tilfellet:

$$\begin{aligned} \vartheta_c &= \sqrt{\left(\frac{3}{n_c} + \frac{3}{n}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{3}{n_c}\right)^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{3}{n_c}\right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{\left(1 + \frac{n_c}{n}\right)^{\frac{2}{3}} - 1} \\ &\simeq \left(\frac{3}{n_c}\right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + \frac{2n_c}{3n} - 1} = 3^{-\frac{1}{3}} \sqrt{2} n_c^{\frac{1}{6}} n^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5.38)$$

Setter vi inn i (5.31), og bruker (5.24) får vi

$$\begin{aligned} dP_n &\sim 2\pi\vartheta_c \left. \frac{P_n}{d\Omega} \right|_{\vartheta=0} \simeq 3^{-\frac{1}{3}} \sqrt{2} n_c^{\frac{1}{6}} n^{-\frac{1}{2}} \frac{\mu_0 c \omega_0^2 n^2 e^2}{12\pi^3} \frac{1}{\gamma^4} \left(\frac{\pi}{2\frac{n}{n_c}} e^{-2\frac{n}{n_c}} \right) \\ &= 0.03 \mu_0 c \omega_0^2 e^2 \gamma \sqrt{\frac{n}{n_c}} e^{-2\frac{n}{n_c}} \sim \gamma \sqrt{\frac{n}{n_c}} e^{-2\frac{n}{n_c}} \end{aligned} \quad (5.39)$$

Det elektromagnetiske frekvensspektrum fra et elektron i sirkulær bevegelse faller av eksponensielt ved frekvenser $n \gg n_c$.

5.4.4 Gravitasjonstråle frekvensspektrum

Vi skal på samme måte finne frekvensspektrumet for gravitasjonsstråling. Vi tar utgangspunkt i (4.99),

$$\begin{aligned} \frac{dP_n}{d\Omega} &= \frac{m^2 G \omega_n^2}{24\pi^4 c} \beta^4 \gamma^2 \left(4\vartheta^2 (\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2}) K_{\frac{1}{3}}(\xi)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{n} \left(\frac{1}{\gamma^2} + 6\vartheta^2 \right) (\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2})^{\frac{3}{2}} K_{\frac{1}{3}}(\xi) K_{\frac{2}{3}}(\xi) + \left(\frac{2}{n^2} + 8\vartheta^2 \right) (\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2})^2 K_{\frac{2}{3}}(\xi)^2 \right) \end{aligned} \quad (5.40)$$

Vi omskriver denne ved hjelp av (5.35) til

$$\frac{dP_n}{d\Omega} = \frac{3m^2 G \omega_0^2}{8\pi^4 c} \beta^4 \gamma^8 \left(\frac{n}{n_c} \right)^2 \left(\frac{4}{\gamma^4} \left(\xi \frac{n_c}{n} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\left(\xi \frac{n_c}{n} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right) K_{\frac{1}{3}}(\xi)^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{4}{3\gamma^8} \frac{n_c}{n} \left(6 \left(\xi \frac{n_c}{n} \right)^{\frac{2}{3}} - 5 \right) \left(\xi \frac{n_c}{n} \right) K_{\frac{1}{3}}(\xi) K_{\frac{2}{3}}(\xi) \\
& + \left(\frac{2}{9\gamma^{10}} \left(\frac{n_c}{n} \right)^2 + \frac{8}{\gamma^6} \left(\left(\xi \frac{n_c}{n} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right) \right) \left(\xi \frac{n_c}{n} \right)^{\frac{4}{3}} K_{\frac{2}{3}}(\xi)^2
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Litt forenkling gir

$$\begin{aligned}
\frac{dP_n}{d\Omega} &= \frac{3m^2 G \omega_0^2}{2\pi^4 c} \beta^4 \gamma^4 \left(\left(\left(\frac{n}{n_c} \right)^{\frac{2}{3}} \xi^{\frac{4}{3}} - \left(\frac{n}{n_c} \right)^{\frac{4}{3}} \xi^{\frac{2}{3}} \right) K_{\frac{1}{3}}(\xi)^2 \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{3\gamma^4} \left(6 \left(\frac{n_c}{n} \right)^{\frac{2}{3}} \xi^{\frac{5}{3}} - 5\xi \right) K_{\frac{1}{3}}(\xi) K_{\frac{2}{3}}(\xi) \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{18\gamma^6} \left(\frac{n_c}{n} \right)^{\frac{4}{3}} \xi^{\frac{4}{3}} + \frac{2}{\gamma^2} \xi^2 - \frac{2}{\gamma^2} \left(\frac{n}{n_c} \right)^{\frac{2}{3}} \xi^{\frac{4}{3}} \right) K_{\frac{2}{3}}(\xi)^2 \right)
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Det som kompliserer spektrumet for gravitasjonsstråling er at vi har forskjellig γ -avhengighet inne i parantesen i (5.42). Dermed klarer vi ikke umiddelbart å finne et universelt frekvensspektrum som vi gjorde det for elektromagnetisk stråling. Men i grensen $\gamma \rightarrow \infty$ vil bare første ledd overleve, slik at vi finner

$$\frac{dP_n}{d\Omega} = \frac{3m^2 G \omega_0^2}{2\pi^4 c} \beta^4 \gamma^4 \left(\left(\frac{n}{n_c} \right)^{\frac{2}{3}} \xi^{\frac{4}{3}} - \left(\frac{n}{n_c} \right)^{\frac{4}{3}} \xi^{\frac{2}{3}} \right) K_{\frac{1}{3}}(\xi)^2 \tag{5.43}$$

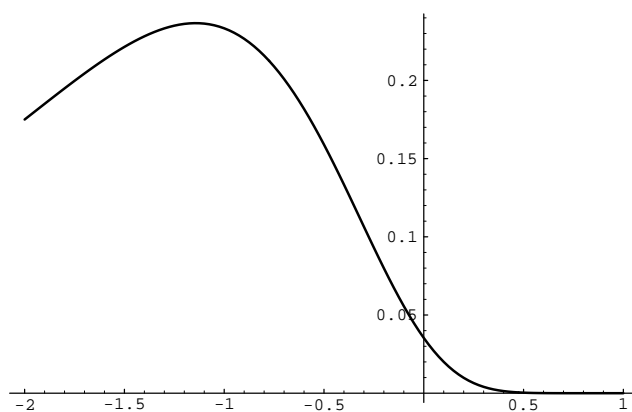
Dette uttrykket kan så integreres over alle romvinkler til å gi et frekvensspektrum som er gyldig for 'store' γ :

$$\begin{aligned}
P_n &= 4\pi \int_0^\infty \frac{dP_n}{d\Omega} d\vartheta \\
&= \frac{6m^2 G \omega_0^2}{\pi^3 c} \beta^4 \gamma^4 \int_0^\infty d\vartheta \left(\left(\frac{n}{n_c} \right)^{\frac{2}{3}} \xi^{\frac{4}{3}} - \left(\frac{n}{n_c} \right)^{\frac{4}{3}} \xi^{\frac{2}{3}} \right) K_{\frac{1}{3}}(\xi)^2
\end{aligned} \tag{5.44}$$

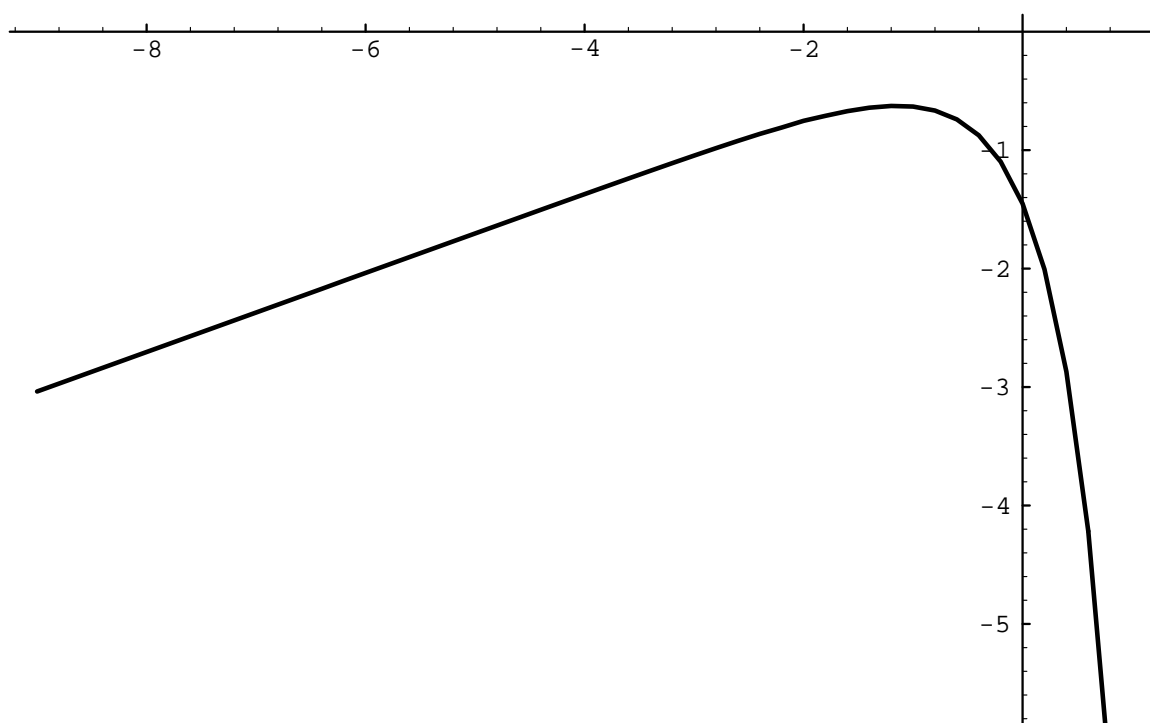
Vi bytter integrasjonsvariabel til ξ ved hjelp av (5.33).

$$P_n = \frac{3m^2 G \omega_0^2}{\pi^3 c} \beta^4 \gamma^3 \left(\frac{n_c}{n} \right)^{\frac{2}{3}} \int_{\frac{n}{n_c}}^\infty d\xi \frac{1}{\xi^{\frac{1}{3}} \sqrt{\left(\xi \frac{n_c}{n} \right)^{\frac{2}{3}} - 1}} \left(\left(\frac{n}{n_c} \right)^{\frac{2}{3}} \xi^{\frac{4}{3}} - \left(\frac{n}{n_c} \right)^{\frac{4}{3}} \xi^{\frac{2}{3}} \right) K_{\frac{1}{3}}(\xi)^2 \tag{5.45}$$

Dette frekvensspektrumet til utstrålt gravitasjonseffekt er vist i Figur 5.8 og Figur 5.9. Vi legger merke til likheten med de tilsvarende spektrumene for elektromagnetisk stråling. Spesielt ser vi at maksimal emittert energi er ved omtrent samme frekvens, og at relativt store deler av energien vil emitteres ved frekvenser nær denne i begge tilfeller.



Figur 5.8: Frekvensspektrum til emittert effekt i form av gravitasjonstråling fra et elektron i sirkelbane.



Figur 5.9: Logaritmisk frekvensspektrum til emittert effekti form av gravitasjonstråling fra et elektron i sirkelbane.

Kapittel 6

Konklusjon

Vi har vist at vi kan finne tilsvarende uttrykk for utstrålt energi og effekt i form av gravitasjonsstråling, som for elektromagnetisk stråling. Fremgangsmåten for å finne slike parallelle formler, er ganske lik for hver av de to typer stråling. Generelt ser det ut til å gjelde at formler for gravitasjonsenergi inneholder flere ledd, og er mer kompliserte av natur.

Vi har sett på det spesielle tilfellet der banen er en sirkelbane, slik som i en synkrotron. Det viste seg, ikke uventet, at utstrålt gravitasjonsenergi fra en synkrotron er fullstendig neglisjerbar i forhold til emittert elektromagnetisk energi. Selv om andelen bedrer seg noe i det ekstremt relativistiske tilfellet, virker det usannsynlig at en skal kunne detektere gravitasjonsstråling fra synkrotroner.

Frekvens og vinkelspektrumene viste mye de samme egenskaper i begge former for stråling fra en synkrotron. Ved store energier vil nesten all energi stråles ut i vinkler veldig nær baneplanet, og ved høye frekvenser i forhold til banefrekvensen.

Andre muligheter

Om synkrotroner ikke sender ut målbare mengder med gravitasjonsstråling, vil vi likevel påpeke muligheten for at andre typer partikkelstrømmer vil kunne gjøre det. Trolig behøves det svært tunge partikler med liten ladning, eller eventuelt en spesiell konfigurasjon der elektromagnetisk stråling ikke sendes ut i så store mengder som i en synkrotron.

For eksempel kan vi tenke oss en strøm av flere elektroner, som stråler ut *koherent*, det vil si avhengig av hverandre. Ved å velge de individuelle posisjonene riktig, kunne vi muligens oppnå at elektromagnetisk stråling slukkes ut. Men

det skal godt gjøres å oppnå så store reduksjonsfaktorer som vi trenger for at gravitasjonsstrålingen skal bli målbar.

En annen mulighet er å filtrere vekk den elektromagnetiske strålingen, for eksempel fra en liten del av en synkrotron. Da kunne man observere gravitasjonsstrålingen akkurat der.

Det er heller ikke utenkelig at andre egenskaper ved gravitasjonsstrålingen, for eksempel polarisasjon og rekkevidde, kan gjøre den detekterbar selv om energimengdene er små.

Det har vært mange muligheter for å gjøre små og store feil, så vi vil påpeke at konklusjonene over avhenger av at vi har regnet riktig. Men inntil videre vil vi tro at man må nøye seg med å detektere gravitasjonsstråling fra utenomjordiske kilder.

Tillegg A

Levi-Civita-symbolet

Vi definerer *Levi-Civita-symbolet* (ϵ -tensoren) i det tredimensjonale rom slik:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{når } ijk = 123, 231 \text{ og } 312 \\ -1 & \text{når } ijk = 213, 321 \text{ og } 132 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Vi får bruk for to formler:

$$(\vec{A} \times \vec{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k \quad (\text{A.2})$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \quad (\text{A.3})$$

der *Kroneckers δ -symbol* er

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{når } i = j \\ 0 & \text{når } i \neq j \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Tillegg B

Mellomregninger

B.1 Fra Liénard-Wiechert potensialene til de elektromagnetiske feltene

Vi skal vise hvordan vi eksplisitt finner de elektromagnetiske feltene fra Liénard-Wiechert potensialene. Ved hjelp av definisjonene (2.9) og (2.10) skal vi altså finne \vec{E} og \vec{B} . Vi setter inn i (2.34), definerer $R\hat{n} \equiv \vec{R}$, og får

$$\vec{E} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\nabla \left[\frac{1}{(R - \vec{\beta} \cdot \vec{R})} \right]_{t'=t-\frac{R(t')}{c}} + \frac{\partial}{c\partial t} \left[\frac{\vec{\beta}}{(R - \vec{\beta} \cdot \vec{R})} \right]_{t'=t-\frac{R(t')}{c}} \right) \quad (\text{B.1})$$

$$\vec{B} = \frac{e\mu_0 c}{4\pi} \nabla \times \left[\frac{\vec{\beta}}{(R - \vec{\beta} \cdot \vec{R})} \right]_{t'=t-\frac{R(t')}{c}} \quad (\text{B.2})$$

B.1.1 Sammenhengen mellom t og t' og mellom x_i og t'

Lyskjeglebetingsen (2.29) medførte en viss sammenheng mellom det retarderte tidspunktet t' og t . Vi kan uttrykke lyskjeglebetingsen i observatørsystemet:

$$\begin{aligned} [x - r(t')]^2 &= 0 \Rightarrow \\ c^2(t - t')^2 - (\vec{x} - \vec{r}(t'))^2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Vi deriverer dette uttrykket med hensyn på t :

$$2c^2(t - t')\left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}\right) + 2(\vec{x} - \vec{r}(t')) \frac{\partial \vec{r}(t')}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.4})$$

Vi benytter våre tidligere definisjoner, $(ct - ct') = |\vec{x} - \vec{r}(t')| \equiv R$, og $\beta(t') \equiv \frac{\partial \vec{r}(t')}{c \partial t'}$.
Dermed finner vi

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \quad (\text{B.5})$$

Tilsvarende vil den retarderte tiden t' avhenge av posisjonen x_i . Denne gang derivierer vi (B.3) med hensyn på x_i :

$$-2cR \frac{\partial t'}{\partial x^i} - 2R\vec{n} \left(\hat{x}_i - \frac{\partial \vec{r}(t')}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x^i} \right) = 0 \quad (\text{B.6})$$

Litt regning gir

$$\frac{\partial t'}{\partial x_i} = -\frac{n_i}{c(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \quad (\text{B.7})$$

Disse sammenhengene mellom t og t' og x_i og t' skal vi bruke i vår videre regning.

B.1.2 Noen deriverte størrelser

Vi lar $\dot{\vec{\beta}} = \frac{d\vec{\beta}}{dt}$. Med (B.5) og (B.7) i minnet går det som en lek å finne de partiellderiverte evaluert i det retarderte tidspunktet $t' = t - \frac{R(t')}{c}$:

$$\partial_i \vec{\beta}(t') = \partial'_t \vec{\beta}(t') \partial_i t' = -\dot{\vec{\beta}} \frac{n_i}{c(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \quad (\text{B.8})$$

$$\partial_i \vec{R} = \partial_i (\vec{x} - \vec{r}(t')) = \hat{x}_i - \frac{\partial \vec{r}(t')}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x^i} = \hat{x}_i + \vec{\beta} \frac{n_i}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \quad (\text{B.9})$$

$$\partial_i R = \vec{n} \cdot \partial_i \vec{R} = \vec{n}_i + \vec{n} \cdot \vec{\beta} \frac{n_i}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} = \frac{n_i}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \quad (\text{B.10})$$

$$\partial_t \vec{\beta}(t') = \frac{\partial \vec{\beta}(t')}{\partial t'} \partial t' \partial t = \frac{\dot{\vec{\beta}}}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \quad (\text{B.11})$$

$$\partial_t \vec{R} = \partial_t (\vec{x} - \vec{r}(t')) = -\frac{\partial \vec{r}(t')}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{c\vec{\beta}}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \quad (\text{B.12})$$

$$\partial_t R = \vec{n} \cdot \partial_t \vec{R} = -\frac{c\vec{n} \cdot \vec{\beta}}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \quad (\text{B.13})$$

I første overgang i (B.10) og (B.13) brukte vi

$$\partial_i (\vec{R}^2) = \partial_i (R^2) \Rightarrow 2\vec{R} \cdot \partial_i \vec{R} = 2R \partial_i R \Rightarrow \partial_i R = \vec{n} \cdot \partial_i \vec{R} \quad (\text{B.14})$$

Vi har nå det nødvendige verktøy for å løse (B.1) og (B.2).

B.1.3 Det elektriske feltet

Ved å bruke (B.8)-(B.13) og $\nabla = \hat{x}_i \partial_i$, finner vi

$$\begin{aligned}
\hat{x}_i \partial_i \frac{1}{(R - \vec{\beta} \cdot \vec{R})} &= -\hat{x}_i \frac{1}{(R - \vec{\beta} \cdot \vec{R})^2} (\partial_i R - \vec{R} \cdot \partial_i \vec{\beta} - \vec{\beta} \cdot \partial_i \vec{R}) \\
&= -\frac{1}{(R - \vec{\beta} \cdot \vec{R})^2} \left(\frac{\vec{n}}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} + \frac{(\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{R}) \vec{n}}{c(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} - \vec{\beta} + \frac{\beta^2 \vec{n}}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \right) \\
&= -\frac{1}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3} \left(\frac{\vec{n}}{R^2} (1 + \beta^2) + \frac{(\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{n}) \vec{n}}{cR} - \frac{\vec{\beta}}{R^2} (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}) \right) \quad (B.15)
\end{aligned}$$

og tilsvarende

$$\begin{aligned}
\partial_t \left[\frac{\vec{\beta}}{(R - \vec{\beta} \cdot \vec{R})} \right] &= \left(\frac{\partial_t \vec{\beta}}{(R - \vec{\beta} \cdot \vec{R})} - \frac{\vec{\beta}}{(R - \vec{\beta} \cdot \vec{R})^2} (\partial_t R - \vec{R} \cdot \partial_t \vec{\beta} - \vec{\beta} \cdot \partial_t \vec{R}) \right) \\
&\quad \frac{1}{(R - \vec{\beta} \cdot \vec{R})^2} \left(R \dot{\vec{\beta}} + \vec{\beta} \left(\frac{c \vec{n} \cdot \vec{\beta}}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} + \frac{\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{R}}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} - \frac{c \beta^2}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \right) \right) \\
&\quad \frac{1}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3} \left(\frac{\dot{\vec{\beta}}}{R} (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}) + \frac{\beta c}{R^2} (\vec{n} \cdot \vec{\beta} - \beta^2) + \frac{\beta}{R} \dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{n} \right) \quad (B.16)
\end{aligned}$$

Setter vi disse to ligningene inn i (B.1) og skiller leddene som går som R^{-2} og R^{-1} fås

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{n} - \beta^2 \vec{n} - \vec{\beta} + \vec{\beta} \beta^2}{R^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3} + \frac{(\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{n}) \vec{n} - \dot{\vec{\beta}} + \dot{\vec{\beta}} (\vec{\beta} \cdot \vec{n}) - \vec{\beta} (\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{n})}{cR (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3} \right) \quad (B.17)$$

Siden $(1 - \beta^2) = \gamma^{-2}$ og

$$\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}] = (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) (\vec{n} - \vec{\beta}) - \vec{n} \cdot (\vec{n} - \vec{\beta}) \dot{\vec{\beta}} \quad (B.18)$$

kan vi skrive \vec{E} mer kompakt som

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{n} - \vec{\beta}}{\gamma^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3 R^2} \right]_{t' = t - \frac{R(t')}{c}} + \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3 R} \right]_{t' = t - \frac{R(t')}{c}} \quad (B.19)$$

Og dermed er ligningen (2.39) vist.

B.1.4 Den magnetiske flukstettheten

Vi benytter ϵ -tensoren som er definert i Appendiks A, og spesielt ligning (A.2). Fra (B.2) finner vi

$$\vec{B} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \hat{x}_i \epsilon_{ijk} \partial_j \left(\frac{\beta_k}{(R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})} \right) \quad (\text{B.20})$$

Vi ser nærmere på derivasjonsdelen av uttrykket. Ved hjelp av (B.8)-(B.13) løses denne lett:

$$\begin{aligned} \partial_j \left(\frac{\beta_k}{(R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})} \right) &= \frac{\partial_j \beta_k}{(R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})} - \frac{\beta_k}{(R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})^2} (\partial_j R - \vec{R} \cdot \partial_j \vec{\beta} - \vec{\beta} \cdot \partial_j \vec{R}) \\ &= -\frac{\dot{\beta}_k n_j}{cR(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^2} - \frac{\beta_k n_j}{R^2(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3} - \frac{(\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \beta_k n_j}{cR(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3} + \frac{\beta_k \beta_j}{R^2(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^2} + \frac{\beta^2 \beta_k n_j}{R^2(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3} \\ &= n_j \left(-\frac{\beta_k(1 - \beta^2)}{R^2(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3} - \frac{\dot{\beta}_k(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}) + (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \beta_k}{cR(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^2} \right) + \frac{\beta_k \beta_j}{R^2(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^2} \quad (\text{B.21}) \end{aligned}$$

Vi setter dette inn i (B.20), og skriver om til kryssproduktform igjen. Samtidig utnytter vi at $\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} = \hat{x}_i \epsilon_{ijk} \beta_j \dot{\beta}_k = 0$. Den magnetiske flukstettheten kan dermed skrives

$$\vec{B} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \vec{n} \times \left(-\frac{\vec{\beta}}{\gamma^2 R^2(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3} - \frac{\dot{\vec{\beta}}(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}) + (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \vec{\beta}}{cR(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^2} \right) \quad (\text{B.22})$$

Ved å utnytte at $\vec{n} \times \vec{n} = 0$, ser vi ved hjelp av (B.18) og (B.19) at \vec{B} kan skrives

$$\vec{B} = \frac{1}{c} [\vec{n} \times \vec{E}]_{t' = t - \frac{R(t)}{c}} \quad (\text{B.23})$$

Den magnetiske flukstetthetens står altså normalt på det elektriske feltet!

Og dermed er ligningene (2.38) og (2.39) endelig vist.

B.2 Utstrålt elektromagnetisk energi fra en ladet partikkel

I Kapittel 2.6 fant vi at fra en aksellerert ladet partikkel vil utstrålt energi per enhets frekvensintervall i retning \vec{n} være:

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \mu_0 c}{16\pi^3} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^2} e^{i\omega(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}(t)}{c})} dt \right|^2 \quad (\text{B.24})$$

Integranden i (B.24) kan omskrives ved bruk av Levi-Civita symbolet definert i Appendiks A:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left[\frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta})}{1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}} \right] \\
&= \frac{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})(\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}})) + (\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta}))\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{n}}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^2} \\
&= \frac{(\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}})) - \sum_i [\beta_a n_a \epsilon_{ijk} n_j \epsilon_{klm} n_l \dot{\beta}_m - \dot{\beta}_a n_a \epsilon_{ijk} n_j \epsilon_{klm} n_l \beta_m]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^2} \\
&= \frac{(\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}})) - \sum_i [\beta_a n_a n_j n_i \dot{\beta}_j - \beta_a n_a n_j n_i \dot{\beta}_i - \dot{\beta}_a n_a n_j n_i \beta_j + \dot{\beta}_a n_a n_j n_j \beta_i]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^2} \\
&= \frac{(\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}})) - \sum_i [-\beta_a n_a \dot{\beta}_i + \dot{\beta}_a n_a \beta_i]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^2} \\
&= \frac{(\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}})) - \sum_i [\epsilon_{ijk} n_j \epsilon_{klm} \beta_l \dot{\beta}_m]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^2} = \frac{(\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}})) - (\vec{n} \times (\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}}))}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^2} \\
&= \frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^2} \tag{B.25}
\end{aligned}$$

Ved delvis integrasjon kan nå integralet i ligning (B.24) skrives

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} \left[\frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta})}{1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}} \right] e^{i\omega(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}(t)}{c})} dt \\
&= \left[\frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta})}{1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}} e^{i\omega(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}(t)}{c})} \right]_{-\infty}^{\infty} \\
&- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}})}{1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}} e^{i\omega(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}(t)}{c})} \left[\frac{d}{dt} i\omega \left(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}(t)}{c} \right) \right] dt \\
&= -i\omega \int_{-\infty}^{\infty} \vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}}) e^{i\omega(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}(t)}{c})} dt \tag{B.26}
\end{aligned}$$

Når vi setter dette inn i (B.24) får vi

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \mu_0 c}{16\pi^3} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}}) e^{i\omega(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}(t)}{c})} dt \right|^2 \tag{B.27}$$

Og dermed er vist det som skulle vises.

B.3 Beregning av effekt per romvinkelenhet

Her vil vi bruke ligning (6.576.4) i [5], som i spesialtilfellet $a = b = 1$ forenkles til

$$\int_0^\infty x^{-\lambda} K_\mu(x) K_\nu(x) dx = \frac{2^{-2-\lambda}}{\Gamma(1-\lambda)}$$

$$\Gamma\left(\frac{1-\lambda+\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\lambda-\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\lambda+\mu-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\lambda-\mu-\nu}{2}\right) \quad (\text{B.28})$$

For at denne formelen skal være oppfylt kreves

$$\text{Re } \lambda < 1 - |\text{Re } \mu| - |\text{Re } \nu| \quad (\text{B.29})$$

B.3.1 For elektromagnetisk stråling

Vi skal regne ut ligning (4.52)

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{\omega_0} \int_0^\infty \frac{\mu_0 c \omega^2 e^2}{24\pi^4} (\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2})^2 \left(\frac{\vartheta^2}{(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2})} K_{\frac{1}{3}}(\xi)^2 + K_{\frac{2}{3}}(\xi)^2 \right) d\omega \quad (\text{B.30})$$

Fra (4.42) har vi

$$\omega = \frac{3c}{r_0} (\gamma^{-2} + \vartheta^2)^{-\frac{3}{2}} \xi \quad (\text{B.31})$$

$$d\omega = d\xi \frac{3c}{r_0} (\gamma^{-2} + \vartheta^2)^{-\frac{3}{2}} \quad (\text{B.32})$$

Vi får

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{9\mu_0 c^3 e^2}{8\pi^4 r_0^2} \frac{1}{(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2})^{\frac{5}{2}}} \int_0^\infty \xi^2 \left(\frac{\vartheta^2}{(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2})} K_{\frac{1}{3}}(\xi)^2 + K_{\frac{2}{3}}(\xi)^2 \right) d\xi \quad (\text{B.33})$$

For å forenkle videre bruker vi (B.28) med $\lambda = -2$ og henholdsvis $\mu = \nu = \frac{1}{3}$ og $\mu = \nu = \frac{2}{3}$. Da får vi

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{9\mu_0 c^3 e^2}{8\pi^4 r_0^2} \frac{1}{(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2})^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\vartheta^2}{(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2})} \frac{1}{\Gamma(3)} \Gamma\left(\frac{11}{6}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) + \frac{1}{\Gamma(3)} \Gamma\left(\frac{13}{6}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) \right) \quad (\text{B.34})$$

Om vi setter inn for Gammafunksjonene, og regner ut, får vi

$$\frac{dP}{d\Omega} \simeq 0.386 \cdot \frac{\mu_0 c^3 e^2}{\pi^4 r_0^2} \frac{1}{(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2})^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\vartheta^2}{(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2})} + 1.40 \right) \quad (\text{B.35})$$

Dermed er ligning (4.54) vist.

B.3.2 For gravitasjonsstråling

Vi skal regne ut ligning (4.100)

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &\simeq \frac{1}{\omega_0} \int_0^\infty \frac{m^2 G \omega^2}{24\pi^4 c} \beta^4 \gamma^2 \left(4\vartheta^2 \left(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right) K_{\frac{1}{3}}(\xi)^2 \right. \\ &- \frac{4}{n} \left(\frac{1}{\gamma^2} + 6\vartheta^2 \right) \left(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right)^{\frac{3}{2}} K_{\frac{1}{3}}(\xi) K_{\frac{2}{3}}(\xi) + \left. \left(\frac{2}{n^2} + 8\vartheta^2 \right) \left(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right)^2 K_{\frac{2}{3}}(\xi)^2 \right) d\omega \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Vi bruker (B.31) og (B.32) og

$$n = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\omega r_0}{c} = 3(\gamma^{-2} + \vartheta^2)^{-\frac{3}{2}} \xi \quad (\text{B.37})$$

Innsatt får vi

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &\simeq \frac{9cGm^2}{8\pi^4 r_0^2} (\gamma^{-2} + \vartheta^2)^{-\frac{9}{2}} \beta^4 \gamma^2 \left(4\vartheta^2 \left(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right) \int_0^\infty \xi^2 K_{\frac{1}{3}}(\xi)^2 d\xi \right. \\ &- \frac{4}{3(\gamma^{-2} + \vartheta^2)^{-\frac{3}{2}}} \left(\frac{1}{\gamma^2} + 6\vartheta^2 \right) \left(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \xi K_{\frac{1}{3}}(\xi) K_{\frac{2}{3}}(\xi) d\xi \\ &\left. + \int_0^\infty \left(\frac{2}{9(\gamma^{-2} + \vartheta^2)^{-3}} + 8\vartheta^2 \xi^2 \right) \left(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right)^2 K_{\frac{2}{3}}(\xi)^2 d\xi \right) \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

Vi bruker (B.28), og finner¹

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &\simeq 1.58 \cdot 10^{-2} \frac{cGm^2}{r_0^2} (\gamma^{-2} + \vartheta^2)^{-\frac{7}{2}} \beta^4 \gamma^2 \left(\vartheta^2 \right. \\ &- 69.3 \left(\frac{1}{\gamma^2} + 6\vartheta^2 \right) \left(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right)^2 - \left. \left(69.3(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2})^3 - 242\vartheta^2 \right) \left(\vartheta^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

Dermed er ligning (4.102) vist.

B.4 Harmoniske frekvenser i utstrålt energi

Vi tar utgangspunkt i ligning (4.13), og viser at n må være et heltall for at integralet skal være forskjellig fra 0:

$$\vec{j}(n, \phi, \theta) = \hat{x} \frac{er_0}{\sqrt{2\pi^4}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{1}{2i} (-e^{i\xi} e^{i\phi} + e^{-i\xi} e^{-i\phi}) e^{in\xi} e^{in\phi} e^{-i\frac{n\omega_0}{c} r_0 \sin\theta \cos\xi}$$

¹Strengt tatt gjelder ikke (B.28) for tilfellet $\int_0^\infty d\xi K_{\frac{2}{3}}(\xi)^2$. Imidlertid ser det ut til å gi riktig svar likevel. Vi har kontrollert svaret mot både numerisk integrasjon og programmet *Mathematica 2.0* (jfr. Appendiks (C)), og alle tre metoder ga likt svar: $-\frac{P_i^2}{2}$.

$$+\hat{y}\frac{er_0}{\sqrt{2\pi^4}}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\frac{1}{2}(e^{i\xi}e^{i\phi}+e^{-i\xi}e^{-i\phi})e^{in\xi}e^{in\phi}e^{-i\frac{n\omega_0}{c}r_0\sin\theta\cos\xi}\quad(\text{B.40})$$

Foreløpig antar vi at $n = \frac{\omega}{\omega_0}$ ikke nødvendigvis er et heltall. Formel (9.1.41) i [2] impliserer

$$e^{-i\frac{n\omega_0}{c}r_0\sin\theta\cos\xi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m\left(-\frac{n\omega_0}{c}r_0\sin\theta\right)e^{im\xi}i^m\quad(\text{B.41})$$

der m er et **heltall**. Setter vi inn dette får vi

$$\begin{aligned}\vec{j}(n, \phi, \theta) &\sim \hat{x}\frac{1}{i}\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m\left(-\frac{n\omega_0}{c}r_0\sin\theta\right)i^m\int_{-\infty}^{\infty}d\xi(-e^{i(n+m+1)\xi}e^{i\phi}+e^{i(n+m-1)\xi}e^{-i\phi}) \\ &+\hat{y}\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m\left(-\frac{n\omega_0}{c}r_0\sin\theta\right)i^m\int_{-\infty}^{\infty}d\xi(e^{i(n+m+1)\xi}e^{i\phi}+e^{i(n+m-1)\xi}e^{-i\phi})\end{aligned}\quad(\text{B.42})$$

Ligning (3.139) i Jackson[3] gir

$$\delta(m+n\pm 1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi e^{i\xi(m+n\pm 1)}\quad(\text{B.43})$$

Derfor får vi bare bidrag fra de heltall $m = -n \mp 1$ når vi summerer i (B.42). Så den Fourieromvendte strømmen er bare forskjellig fra null når $n = \frac{\omega}{\omega_0}$ er et heltall. Regner vi videre kommer vi selvfølgelig frem til resultatet (4.19):

$$\begin{aligned}\vec{j}(n, \phi, \theta) &\sim -\hat{x}2\pi\text{lyskjglebetingelsen}(2.29)\frac{1}{i}\left(i^{n+1}e^{i\phi}J_{n+1}\left(-\frac{n\omega_0}{c}r_0\sin\theta\right)+i^{n-1}e^{-i\phi}J_{n-1}\left(-\frac{n\omega_0}{c}r_0\sin\theta\right)\right) \\ &+\hat{y}2\pi\left(i^{n+1}e^{i\phi}J_{n+1}\left(-\frac{n\omega_0}{c}r_0\sin\theta\right)+i^{n-1}e^{-i\phi}J_{n-1}\left(-\frac{n\omega_0}{c}r_0\sin\theta\right)\right)\end{aligned}\quad(\text{B.44})$$

Her har vi brukt (9.1.5) i [2]:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) = i^{2n} J_n(x)\quad(\text{B.45})$$

Tillegg C

Prosedyre for forenkling av utstrålt gravitasjonsenergi

Her presenteres en prosedyre som ble kjørt i programmet *Mathematica 2.0*¹, for å kontrollere regningen mellom ligning (4.84) og ligning (4.96).

```
(* Foerst sletter vi tidligere definisjoner
av de funksjonene som skal defineres *)
Clear[t11,t11stjerne,t12,t12stjerne,t22,
t22stjerne,ene1,ene2,ene3,ene4,koeff1,koeff2,koeff3];

(* t11stjerne er den kompleksonjugerte
11-komponenten av energi-impulstensoren, osv. *)
(* t=theta, p=phi, -b= argumentet til Besselfunksjonen ,a=konstant *)
t11[t_,p_,a_,b_,n_]=
a ( I^n E^(I n p) BesselJ[n,-b]-
(I^(n+2) E^(I(n+2)p) BesselJ[n+2,-b] /2)-
(I^(n-2) E^(I p(n-2)) BesselJ[n-2,-b]/2));
t11stjerne[t_,p_,a_,b_,n_]=
a ( (-I)^n E^(-I n p) BesselJ[n,-b]-
((-I)^(n+2) E^(-I(n+2)p) BesselJ[n+2,-b] /2)-
((-I)^(n-2) E^(-I p(n-2)) BesselJ[n-2,-b]/2));
t22[t_,p_,a_,b_,n_]=
a ( I^n E^(I n p) BesselJ[n,-b]+
(I^(n+2) E^(I(n+2)p) BesselJ[n+2,-b] /2)+
(I^(n-2) E^(I p(n-2)) BesselJ[n-2,-b]/2));
t22stjerne[t_,p_,a_,b_,n_]=
a ( (-I)^n E^(-I n p) BesselJ[n,-b]+
((-I)^(n+2) E^(-I(n+2)p) BesselJ[n+2,-b] /2)+
((-I)^(n-2) E^(-I p(n-2)) BesselJ[n-2,-b]/2));
t12[t_,p_,a_,b_,n_]=- (a/(2 I))(I^(n+2) E^(I p(n+2)) BesselJ[n+2,-b]-
```

¹Mathematica 2.0 for HP Apollo Domain/OS. Copyright 1988-91 Wolfram Research, Inc.

```

I^(n-2) E^(I p (n-2)) BesselJ[n-2,-b]);
t12stjerne[t_,p_,a_,b_,n_]=+(a/(2 I))
((-I)^(n+2) E^(-I p(n+2)) BesselJ[n+2,-b] -
(-I)^(n-2) E^(-I p (n-2)) BesselJ[n-2,-b]);

(*Har naa definert leddene,
setter opp uttrykket for utsraalt energi minus noen prefaktorer *)
ene1[t_,p_,a_,b_,n_]=
t11stjerne[t,p,a,b,n] t11[t,p,a,b,n] (1-(1/2)
+Sin[t]^2 (-2+(1/2)+(1/2))+Sin[t]^4 (1/2))+
t12stjerne[t,p,a,b,n] t12[t,p,a,b,n] (1+1-2 Sin[t]^2)+
t22stjerne[t,p,a,b,n] t22[t,p,a,b,n] (1-(1/2))+
t11stjerne[t,p,a,b,n] t22[t,p,a,b,n] (-(1/2)+(1/2) Sin[t]^2)+
t22stjerne[t,p,a,b,n] t11[t,p,a,b,n] (-(1/2)+(1/2) Sin[t]^2);

(* Maa substituere (i)^n (-i)^n=1 for haand,
samtidig forenkler vi uttrykket *)
ene2[t_,p_,a_,b_,n_]=
Simplify[Expand[ene1[t,p,a,b,n]]] /. (-I)^n I^n ->1;

(* Symmetri gjoer at vi kan sette inn p=phi=0,
setter a=1 for enkelthets skyld *)
(* Substituerer for J de uttrykkene vi fant i teksten,
setter x inn for -b *)
ene3[t_,x_,n_,j_,jder]= ene2[t,0,1,b,n] /.
{ BesselJ[-2+n,-b] ->
(1/2)((2n/x)^2-2)j-(4/x)jder+(4n/x)jder-(4n/x^2)j),
BesselJ[2+n,-b] ->
(1/2)((2n/x)^2-2)j-(4/x)jder-(4n/x)jder+(4n/x^2)j),
BesselJ[n,-b] ->j};

(*Substituerer for x og Sin[t] de uttrykkene vi fant i teksten *)
ene4[t_,g_,n_,j_,jder]=Expand[ene3[t,x,n,j,jder]] /.
{x^-1 -> n^-1 (1+(1/2)(g^-2+t^2)),
x^-2 -> n^-2 (1+(2/2)(g^-2+t^2)),
x^-3 -> n^-3 (1+(3/2)(g^-2+t^2)),
x^-4 -> n^-4 (1+(4/2)(g^-2+t^2)),
Sin[t]^2 -> 1 - t^2 ,Sin[t]^4 -> 1- 2t^2}

(*Koeffesientene for J^2 og Jderivert^2
og JxJderivert kan naa finnes *)
koeff1=Expand[Coefficient[ene4,j,2]]
koeff2=Expand[Coefficient[ene4,jder,2]]
koeff3=Expand[Coefficient[ene4,jder,1]]/j

(* slutt *)

```

Tillegg D

Referanser

- [1] Kreyszig, E., *Advanced Engineering Mathematics*. 6th ed. New York: Wiley, 1988.
- [2] Abramowitz, M., Stegun, I. A., *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover, 1965.
- [3] Jackson, J.D., *Classical Electrodynamics*. 2nd ed. New York: Wiley, 1975.
- [4] Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology*. New York: Wiley, 1972.
- [5] Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M., *Table of Integrals, Series and Products*
- [6] Schwinger, J., Phys. Rev. **75**, 1912 (1949).
- [7] Montanet et al., Phys. Rev. D. **1246**, Part 1 (1994).
- [8] Misner, W., Thorne, S., Wheeler, J.A., *Gravitation*. San Fransisco: W. H. Freeman and co. 1970.
- [9] Kleppner, D., Physics Today, April 1993, side 9.
- [10] New Scientist, 26 november 1994, side 26.
- [11] Rohrlich, F., *Classical Charged Particles*, Reading, Mass.: Addison-Wesley. 1965.
- [12] Physics Today, July 1994, side 33-40.